Thema: Riemann-Integration im Mehrdimensionalen, Satz von Fubini, Transformationsformel

Abgabe: Präsenzblatt

Besprechung: Dienstag, 22. Oktober 2019

Aufgabe 1. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist $|f|$ Riemann-integrierbar und

$$\left| \int_Q f(x)dx \right| \leqslant \int_Q |f(x)|dx.$$

Aufgabe 2. Geben Sie eine überabzählbare Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$, die Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 3. Sei $A = B = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Definiere $f : A \times B \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige: für jedes $x \in A$ ist $f_x(y) := f(x,y) : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, aber f ist nicht Riemann-integrierbar.

Aufgabe 4. Sei $A = B = [0,1] \subset \mathbb{R}$ und K die Cantormenge. Definiere $f : A \times B \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \cap K \text{ und } y \in B \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige: die Funktion f ist Riemann-integrierbar. Die Funktion $f_x : B \to \mathbb{R}$ (definiert wie oben) ist nur für $x \in A \setminus K$ Riemann-integrierbar, nicht aber für $x \in K$.

Aufgabe 5. Man berechne das Integral

$$\int_A \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy,$$

wobei $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.

Aufgabe 6. Man berechne das Integral

$$\int_A x^2 + y^2 dxdy,$$

wobei $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x+y \leqslant 1\right\}$.