Thema: Riemann-Integration im Mehrdimensionalen, Satz von Fubini, Transformationsformel

Abgabe: Donnerstag, 24. Oktober 2019

Besprechung: Dienstag, 29. Oktober 2019

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ beschränkt und $n > k$. Die Menge

$$A := M \times \{0\}^{n-k} = \left\{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_k) \in M\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

ist eine Jordan-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmeng. Dann ist

$$\operatorname{vol}(A) := \int_A 1 dx = 0.$$

Aufgabe 3. Man berechne das Volumen des Durchschnitts der beiden Zylinder

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}, \\ Z_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie für $0 < a < b$ das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\log(x)} dx.$$

Hinweis: Man wende den Satz von Fubini auf die Funktion $f(x, y) = x^y$ an.

Zusatzaufgabe. Sei $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ der zwei-dimensionale Simplex

$$S_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \;\middle|\; x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$$

und $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Man zeige, daß für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{S_2} f(x + y) x^m y^n d(x, y) = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} \int_0^1 f(t) t^{m+n+1} dt.$$