Thema: Prä-Hilbert-Räume, Fourierkoeffizienten

Abgabe: Donnerstag, 9. Januar 2020

Besprechung: Dienstag, 14. Januar 2020

Aufgabe 1. Sei $H = \mathcal{R}([0,1];\mathbb{K})$ mit Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \qquad \text{für alle } f,g \in H$$

wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) Man zeige, daß $\{\sqrt{2}\sin(k\pi -) \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H ist.

(b) Man zeige für alle $g \in H$ die Identität

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

wobei

$$b_k = 2\int_0^1 g(x)\sin(k\pi x)dx \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2. Sei $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Man zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = 0.$$

Aufgabe 3. Sei f die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \in [0, 2\pi)$.

(a) Man bestimme die Fourier-Reihe von f.

(b) Konvergiert diese Fourier-Reihe punktweise gegen $f(x)$? Konvergiert sie gleichmäßig?

(c) Mit Hilfe von (a) berechne man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(d) Mit Hilfe von (a) und der Parseval-Identität zeige man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Hinweis: Man beachte, daß f keine gerade Funktion ist, also die Koeffizienten b_n nicht notwendig verschwinden.
Weiterhin lassen sich die auftauchenden Integrale durch die Periodizität vereinfachen, z.B. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$, etc.

Aufgabe 4. Die Menge

$$\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{C} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$$

ist ein (Prä-)Hilbert-Raum. Sei

$$E := \{x = (x_n)_n \mid ||x|| = \sqrt{(x,x)} = 1\} \subset \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$$

der Einheitsball in $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Man zeige, daß E nicht kompakt ist.
Hinweis: Man finde eine Folge von Einheitsvektoren, die keine konvergente Teilfolge hat.