Thema: Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

Abgabe: Donnerstag, 16. Januar 2020

Besprechung: Dienstag, 21. Januar 2020

Aufgabe 1. Man betrachte die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) \qquad \text{für alle } x \in (0,1), t > 0 \tag{1}$$

mit der Rand- und Anfangsbedingung

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ für alle } t \geqslant 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ für alle } x \in [0,1] \tag{3}$$

wobei $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei und fr̈ alle $t > 0$ zweimal stetig differenzierbar sei bezüglich $x \in [0,1]$.

(a) Man bestimme alle nicht-trivialen Lösungen von (1) und (2) in der Form $u(x,t) = f(x)g(t)$ für alle $x \in [0,1]$, $t \geqslant 0$.

(b) Nun sei $u_0 : [0,1] \to \mathbb{K}$, so daß

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \sin(k\pi x) \qquad \text{für alle } x \in [0,1],$$

wobei $a_k \in \mathbb{K}$ für alle $k = 1, \ldots, N$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben sind. Man bestimme eine Lösung von (1) - (3).

(c) Man zeige, daß die Lösung eindeutig ist.

(d) Man zeige (mit Hilfe der Parseval-Identität), daß für die Lösung u

$$\int_0^1 |u(x,t)|^2 dx \leqslant e^{-2\pi^2 t} \int_0^1 |u_0(x)|^2 dx \qquad \text{für alle } t > 0$$

gilt.

Aufgabe 2. Man betrachte die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b], \tag{4}$$

wobei $a_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig seien. Man bestimme geeignete $q, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ so, daß die zweimal stetig differenzierbare Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann (4) löst, wenn

$$v(x) := \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x a_1(t)dt\right) u(x), \qquad x \in [a,b]$$

eine Lösung von

$$v''(x) + q(x)v(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b]$$

ist.

Aufgabe 3. Man bringe die folgenden Randwertprobleme in die Form

$$\begin{aligned} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) &= f(x) \qquad \text{für alle } x \in [0,1] \\ R_1 u = \alpha_1 u(0) + \alpha_2 p(0)u'(0) &= \eta_1, \\ R_2 u = \beta_1 u(1) + \beta_2 p(1)u'(1) &= \eta_2, \end{aligned}$$

und diskutiere deren Lösbarkeit.

(a) $u''(x) - u(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 2.$

(b) $u''(x) + e^x = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = u(1).$

(c) $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) + u'(0) = 1, \quad u(1) = 0.$