Thema: Randwertprobleme, Green'sche Funktion, Eigenwertprobleme

Abgabe: Donnerstag, 13. Januar 2020

Besprechung: Dienstag, 28. Januar 2020

Aufgabe 1. Sei Γ die Green'sche Funktion, eingeführt in der Vorlesung in Satz 4.20. Man zeige, daß

$$\partial_x \Gamma(x+, x) - \partial_x \Gamma(x-, x) = \frac{1}{p(x)} \qquad \text{für alle } x \in [a, b],$$

wobei $\partial_x \Gamma(x\pm, x) = \lim_{h \to 0+} \partial_x \Gamma(x \pm h, x)$ dh. $\partial_x \Gamma(x, y)\big|_{(x\pm, x)}$, wobei die Ableitung im ersten Fall auf $x > y$ und im zweiten Fall auf $x < y$ berechnet wird.

Aufgabe 2. (a) Für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} &u''(x) + u(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in [0, 1] \\ &u(0) = u(1) = 0 \end{aligned}$$

bestimme man die Green'sche Funktion.

(b) Für $f(x) = e^x$ bestimme man die Lösung des obigen Randwertproblems.

(c) Man bestimme die Green'sche Funktion zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} &u''(x) + \frac{u(x)}{4x^2} = f(x) \qquad \forall x \in [1, 2] \\ &u(1) = u(2) = 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Man substituiere $x = e^{2t}$.

Aufgabe 3. Man löse das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} &u''(x) + 3u'(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad \forall x \in [0, 1], \\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (a) Man bringe das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} &x^2 u''(x) + x u'(x) + \lambda u(x) = 0 \qquad \forall x \in [1, 2], \\ &u(1) = u(2) = 0, \end{aligned}$$

in Sturm–Liouville-Form.

(b) Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenfuktionen für das Sturm–Liouville-Problem

$$\begin{aligned} &u''(x) = \lambda u(x) \qquad \forall x \in [0, 1], \\ &u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \end{aligned}$$