Thema: Eigenwertprobleme, symmetrische Operatoren

Abgabe: Donnerstag, 30. Januar 2020

Besprechung: Dienstag, 4. Februar 2020

Aufgabe 1. Sei H ein komplexer Prä-Hilbertraum mit Skalar $(-,-)$ und $K : H \to H$ ein linearer Operator. Man zeige:

(a) Ist $K : H \to H$ symmetrisch, (das heißt, es gilt

$$(Kf, g) = (f, Kg) \quad \forall f, g \in H)$$

und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert zu einem Eigenvektur f, (das heißt, es gilt

$$Kf = \lambda f \qquad \text{und} \qquad f \neq 0)$$

so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $K : H \to H$ schiefsymmetrisch, (das heißt, es gilt

$$(Kf, g) = -(f, Kg) \quad \forall f, g \in H)$$

und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert zu einem Eigenvektor f, (das heißt, es gilt

$$Kf = \lambda f \qquad \text{und} \qquad f \neq 0)$$

so ist $\lambda \in i\mathbb{R}$.

(c) Ist K symmetrisch oder schiefsymmetrisch und sind f_1 und f_2 Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt $(f_1, f_2) = 0$.

Aufgabe 2. Sei $r : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig, $H = C([a, b]; \mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_r = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}r(x)dx \qquad \forall f, g \in H,$$

und der Metrik $\|f\|_r = \sqrt{(f, f)_r}$. Man zeige:

(a) Es gibt Konstanten $c, C > 0$, so daß

$$c\|f\| \leqslant \|f\|_r \leqslant C\|f\|,$$

mit

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in H.$$

(b) Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H die gleichmäßig gegen $f \in H$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f bezüglich $(-,-)_r$, das heißt

$$\|f_n - f\|_r \to_{n\to\infty} 0.$$

Aufgabe 3. Sei $(Lu)(x) := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x)$ der Differentialoperator aus der Vorlesung mit $p\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, $q\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $q(x) \leqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$, mit Randbedingungen $R_1u = u(a)$, $R_2u = u(b)$. Definiere

$$E(u, v) := \int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx - \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx, \qquad E(u) := E(u, u)$$

für alle $u, v \in \mathcal{D}(L) := \{w : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differentierbar mit $w(a) = w(b) = 0\}$.
Das Randwertproblem $Lu = 0$, $R_1u = R_2u = 0$ habe nur die triviale Lösung und $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > \cdots$ seien die Eigenwerte von L mit zugehörigen Eigenfunktionen $u_k, k \in \mathbb{N}$. Man zeige:

(a) $E : \mathcal{D}(L) \times \mathcal{D}(L) \to \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt.

(b) Es gilt

$$E(u,v) = -\int_a^b (Lu)(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)(Lv)(x)dx \qquad \forall u,v \in \mathcal{D}(L)$$

und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist ein Orthogonalsystem bezüglich $E(-,-)$.

(c) Es gilt

$$E(u) \geqslant -\lambda_1 \int_a^b u(x)^2 dx \qquad \forall u \in \mathcal{D}(L),$$

wobei λ_1 der größte Eigenwert von L sei. Es gilt Gleichheit genau dann, wenn u eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 oder konstant gleich Null ist.
Hinweis: Bessel'sche Ungleichung.

(d) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lambda_k \leqslant \sup_{x\in[a,b]} q(x).$$

Zusatzaufgabe. Man löse das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} &x^2u'' + xu' + \lambda u = 0 \qquad \forall x \in [1,2],\\ &u(1) = 0,\\ &u(2) = 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Man betrachte die Fälle $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$.