Thema: Untermannigfaltigkeiten, Oberflächenintegrale, Uneigentliche Integrale, Integralsätze

Abgabe: Donnerstag, 31. Oktober 2019

Besprechung: Dienstag, 5. November 2019

Aufgabe 1. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine geschlossene, überschneidungsfreie reguläre und stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma'(a) = \gamma'(b)$. Man zeige, daß $M = \gamma([a,b])$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist, und

$$\int_M f(x) d\sigma(x) = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

für jede Riemann-integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und äußerer Normalen ν, sowie $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetitg differenzierbar. Man zeige:

$$\int_\Omega (\nabla\phi(x))F(x)dx = -\int_\Omega \phi(x)\mathrm{div}F(x)dx + \int_{\partial\Omega} \phi(x)F(x)\cdot\nu(x)d\sigma(x).$$

Aufgabe 3. Sei $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Man zeige, daß

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)dxdy \neq \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 f(x.y)dydx$$

und schließe daraus, daß f nicht integrierbar ist.

Aufgabe 4. Man berechne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ und benutze dazu mehrdimensionale Integrale.

(a) Man begründe, daß dieses Integral konvergiert.

(b) Für $a > 0$ sei K_a das Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum 0 und Seitenlänge $2a$ und C_a die Kreisscheibe mit Zentrum 0 und Radius a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

definiert. Man begründe

$$\int_{C_a} f(x,y)dxdy \leqslant \int_{K_a} f(x,y)dxdy \leqslant \int_{C_{a\sqrt{2}}} f(x,y)dxdy.$$

(c) Man berechne

$$\int_{C_a} f(x,y)dxdy.$$

Hinweis: Transformationsformel.

(d) Man bestimme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$