Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie eine kurze Begründung an. (5 Punkte)

(i) Jede beschränkte Funktion ist Riemann-integrierbar.

(ii) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist zweimal komplex differenzierbar.

(iii) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist holomorph.

(iv) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

(v) Die Differentialgleichung $x^2y'' + 3xy' + 4y = 0$, $x \in (0, \infty)$ ist nicht linear.

Aufgabe 2. Finden Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

auf $(0, \infty)$. (5 Punkte)

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2}dx.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. Sei f die 2π-periodischen Funktion definiert durch

$$f(x) = x^2 \qquad \text{für } -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

(i) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f. (3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 5. (i) Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und deren Art. (4 Punkte)

(a)

$$z \mapsto \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

(b)

$$z \mapsto \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

(ii) Finden Sie eine holomorphe Funktion, die in der komplexen Ebene genau einen dreifachen Pol bei -1 hat und wesentliche Singularitäten bei i und $-i$. (1 Punkt)

Aufgabe 6. Man betrachte die Wärmeleitungsgleichung mit Dämpfung

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) - 7u(x,t) \qquad \forall x \in (0,1), t > 0$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \forall t > 0.$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes möglichst viele nicht-triviale Lösungen des obigen Randwertproblems. (3 Punkte)

(ii) Lösen sie das obige Randwertproblem mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(2\pi x).$$

(2 Punkte)