Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie eine kurze Begründung an. (5 Punkte)

(i) Jede beschränkte Funktion ist Riemann-integrierbar.

(ii) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist zweimal komplex differenzierbar.

(iii) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist holomorph.

(iv) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

(v) Die Differentialgleichung $x^2y'' + 3xy' + 4y = 0$, $x \in (0, \infty)$ ist nicht linear.

Lösung. (i) Nein: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{falls } x \in [0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$

Hier ist für jede Zerlegung Z des Quaders $[0,1]^2$ die Schwankungssumme $D_Z(f) = 1$, also f nicht Riemann-integrierbar.

(ii) Ja: Da f holomorph ist, ist f nach dem Potenzreihenentwicklungssatz sogar unendlich oft komplex differenzierbar.

(iii) Nein: sie erfüllt die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen nicht

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial - y}{\partial y}.$$

(iv) Nein: $0 \notin \exp(\mathbb{C})$.

(v) Nein: sie ist linear (aber hat nicht-konstante Koeffizienten).

Aufgabe 2. Finden Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

auf $(0, \infty)$. (5 Punkte)

Lösung. Für $x \neq 0$ ist dies äquivalent zur Gleichung $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$, eine Euler-Gleichung. Durch Substitution $x = e^t$, bzw. $u(t) = y(e^t)$ läßt sich dies zurückführen auf

$$u'' + (3-1)u' + 2u = 0.$$

Das zugeörige charakteristische Polynom ist

$$p(X) = X^2 + 2X + 2 = (X - (-1+i))(X - (-1-i)),$$

mit den beiden verschiedenen Nullstellen $-1 \pm i$. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$y_1(x) = u_1(\ln x) = e^{(-1+i)\ln x} = \frac{1}{x}x^i$$
$$y_2(x) = u_2(\ln x) = e^{(-1-i)\ln x} = \frac{1}{x}x^{-i}$$

oder durch

$$y_1(x) = \frac{1}{x}\sin(\ln x)$$
$$y_2(x) = \frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

oder durch

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2} dx.$$

(5 Punkte)

Lösung. Wir wenden den Residuensatz an. Für $f(z) := \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}$ hat der Nenner die dopelten Nullstellen $\pm i$, also keine reellen Nullstellen.
Außderdem gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{z^2} \left(\frac{z^2+z}{z^2+2+\frac{1}{z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^4}} + \frac{1}{z+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^3}} \right) \end{aligned}$$

also $|f(z)| \leqslant \frac{2}{|z^2|}$ für $|z|$ groß genug.
Damit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in S_+} \operatorname{Res}(f, z_0),$$

wobei $S_+ = \left\{ z_0 \in \mathbb{C} \;\middle|\; (z_0^2+1)^2 = 0, \Im z_0 > 0 \right\}$.
Es ist i der einzige Pol von $f(z)$, mit echt positivem Imaginärteil. Also genügt es das Residuum von f bei i zu berechnen.

Da i ein Pol zweiter Ordnung ist, sei dazu $g(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{z(z+1)}{(z+i)^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \frac{1}{(2-1)!} g^{(2-1)}(i) \\ &= g'(i) = \frac{(z+i)(2z+1) - 2z(z+1)}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = -\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2} dx = -2\pi i \frac{i}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 4. Sei f die 2π-periodischen Funktion definiert durch

$$f(x) = x^2 \qquad \text{für } -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

(i) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f. (3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

(2 Punkte)

Lösung. (i) Da f gerade ist, sind die Fourierkoeffizienten b_n bezüglich Sinus gleich Null. Wir berechnen den Koeffizienten zu 1.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

und mittels partieller Integration, die Koeffizienten zu $\cos(nx)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = (-1)^n\frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f ist also

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

(ii) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, können wir auf $[-\pi,\pi]$ f als Fourierreihe schreiben

$$x^2 = f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Wertet man dies bei 0 uas, so folgt

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe 5. (i) Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen und deren Art. (4 Punkte)

(a)

$$z \mapsto \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

(b)

$$z \mapsto \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

(ii) Finden Sie eine holomorphe Funktion, die in der komplexen Ebene genau einen dreifachen Pol bei -1 hat und wesentliche Singularitäten bei i und $-i$. (1 Punkt)

Lösung. (i) Die Funktion $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ hat Singularitäten bei $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nahe 0, also frür $k = 0$, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{z + \mathcal{O}(z^2)} - \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\mathcal{O}(z)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{z}\left(1 + \mathcal{O}(z) - 1\right) = \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Also hat die Funktion einen Grenzwert bei 0, und 0 ist hebbar.

Für $k \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\sin(z)}\right| &\xrightarrow[z\to k\pi]{} +\infty \\ \frac{1}{z} &\xrightarrow[z\to k\pi]{} \frac{1}{k\pi} \end{aligned}$$

und damit ist $k\pi$ ein Pol.

Die Funktion $\exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$ hat genau eine Singularität bei $z = 1$. Für die Folge $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, die gegen 1 konvergiert, hat man

$$f(u_n) = \exp(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Für die Folge $v_n = 1 + \frac{1}{in}$, die gegen 1 konvergiert, ist dagegen

$$f(v_n) = \exp(1 + in)$$

beschränkt. Also ist 1 eine wesentliche Singularität.

(ii)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\backslash\{-1, i, -i\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{(z+1)^3} + e^{\frac{1}{z^2+1}} \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Man betrachte die Wärmeleitungsgleichung mit Dämpfung

$$\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) - 7u(x,t) \qquad \forall x \in (0,1), t > 0$$

mit Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \forall t > 0.$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes möglichst viele nicht-triviale Lösungen des obigen Randwertproblems. (3 Punkte)

(ii) Lösen sie das obige Randwertproblem mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(2\pi x).$$

(2 Punkte)

Lösung. (i) Wir nehmen an $u(x,t) = f(x)g(t)$. Es folgt

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t) - 7f(x)g(t).$$

Falls $g(t) \neq 0$ und $f(x) \neq 0$ erhalten wir

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} - 7 = \lambda.$$

Als Gleichung für g ergibt sich

$$g'(t) - \lambda g(t) = 0$$

mit charakteristischem Polynom $p_g(X) = X - \lambda$, also als allgemeine Lösung $g(t) = ae^{\lambda t}$, $a \in \mathbb{R}$.

Für f ergibt sich

$$f''(x) - (7+\lambda)f(x) = 0$$

mit charakteristischem Polynom $p(X) = X^2 - (\lambda + 7)$.

1. Fall: $\lambda + 7 > 0$.

Dann ist die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda+7}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda+7}x}.$$

Mit den Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$ ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$, also keine nicht-triviale Lösung.

2. Fall: $\lambda + 7 = 0$.
Dann ist die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1 + c_2 x.$$

Mit den Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$ ergibt sich $c_1 = c_2 = 0$, also keine nicht-triviale Lösung.

3. Fall: $\lambda + 7 < 0$.
Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$f(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-(\lambda+7)}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-(\lambda+7)}x\right).$$

Mit $f(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$. Mit $f(1) = 0$ folgt $c_2 \sin\left(\sqrt{-(\lambda+7)}\right) = 0$. Für eine nicht-triviale Lösung muß also $\sqrt{-(\lambda+7)} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten die Lösungen

$$f(x) = b_k \sin(k\pi x) \qquad \text{und} \qquad g(t) = a_k e^{-(k^2\pi^2+7)t}, k \in \mathbb{Z}.$$

Insgesamt erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}\backslash 0$ die nicht -trivialen Lösungen

$$u_k(x,t) = a_k e^{-(k^2\pi^2+7)t} \sin(k\pi x).$$

(ii) Nach (i) folgt

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 \\ a_3 &= 2 \\ a_k &= 0 \qquad \text{falls } k \neq 2,3 \end{aligned}$$

also

$$u(x,t) = 3e^{-(4\pi^2+7)t} \sin(2\pi x) + 2e^{-(9\pi^2+7)t} \sin(3\pi x).$$