

Analysis III für Physiker

WiSe 2019/20
Prof. Dr. Helmut Abels

Vorwort

Die Vorlesung “Analysis III für Physiker” setzt die Vorlesung “Analysis II für Physiker” aus dem Sommersemester 2019 fort. Im ersten Teil wird die Integrationstheorie im Mehrdimensionalen behandelt und insbesondere die wichtigen Integralsätze behandelt. Im zweiten Teil wird die sogenannte Funktionentheorie behandelt, dabei werden Eigenschaften von komplex differenzierbaren Funktionen $f: G \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ untersucht. Diese besitzen viele bemerkenswerte und erstaunliche Eigenschaften im Gegensatz zu reell differenzierbaren Funktionen. Insbesondere wird das sogenannte Residuenkalkül behandelt, der viele Anwendungen – auch in der Physik – hat. Anschließend werden wir uns mit sogenannten Zwei-Punkttrandwertproblemen von Differentialgleichungen beschäftigen und Eigenwerte von Differentialoperatoren studieren. Dies führt auf eine Verallgemeinerung von Fourierreihen. Mit Hilfe vom sogenannten Separationsansatz werden wir damit einige grundlegende partielle Differentialgleichungen lösen können.

Dieses Skript ist eine Überarbeitung des Skriptes aus dem Wintersemester 2016/17 und basiert im Teil über Funktionentheorie auf einem von Herrn Robert Martin gesetzten Vorlesungsskript zu meiner Vorlesung “Analysis III” aus dem Wintersemester 2012/13. Hiermit möchte ich mich sehr bei Herrn Martin für die sorgfältige Erstellung des Skriptes und der zur Verfügungstellung des T_EX-Quellcodes bedanken. Die weitere Teile orientieren sich am Buch “Mathematik für Physiker 3” von Goldhorn und Heinz erschienen im Springer-Verlag.

Inhaltsverzeichnis

1	Mehrdimensionale Integration	5
1.1	(Riemann-)Integration im Mehrdimensionalen	5
1.2	Iterierte Integrale – der Satz von Fubini	12
1.3	Die Transformationsformel	14
1.4	Oberflächenintegrale	16
1.5	Uneigentliche Riemann-Integrale	20
1.6	Integralsätze im \mathbb{R}^n	21
2	Funktionentheorie	29
2.1	Holomorphe Funktionen / komplexe Differenzierbarkeit	29
2.2	Der Cauchysche Integralsatz	37
2.2.1	Kurvenintegrale	37
2.2.2	Der Cauchysche Integralsatz	38
2.3	Umkehrfunktionen und die komplexen Logarithmen	44
2.3.1	Biholomorphe Abbildungen	44
2.4	Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen	49
2.5	Isolierte Singularitäten	51
2.5.1	Die drei Typen isolierter Singularitäten	51
2.5.2	Laurentreihen	53
2.5.3	Anwendungen auf isolierte Singularitäten	56
2.5.4	Residuensatz	58
2.6	Residuenkalkül	60
2.6.1	Integrale über \mathbb{R}	60
2.6.2	Trigonometrische Integrale	61
3	Separationsansatz für partielle Differentialgleichungen	63
3.1	Die schwingende Saite	63
3.2	Die Laplace-Gleichung im Quadrat	67
3.3	Die kreisförmige, schwingende Membran	69
4	Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen	72
4.1	Unendliche Orthogonalsysteme und Prähilberträume	72
4.2	Sturmsche Randwertprobleme	79
4.3	Sturm-Liouville-Eigenwertprobleme	85
4.4	Beweis vom Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren	92
4.5	Singuläre Randwertprobleme	97
4.6	Regulär singuläre gewöhnliche Differentialgleichungen	97

5	Kugelfunktionen und weitere spezielle Funktionen	102
5.1	Separationsansatz in Kugelkoordinaten	102
5.2	Zugeordneten Legendre-Funktionen	104
5.3	Kugelfunktionen	106
5.4	Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	108
5.5	Exkurs: Orthogonalpolynome	108
5.6	Besselfunktionen erster Art	110
5.7	Anwendung auf die Helmholtz-Gleichung und schwingende Membran	115

1 Mehrdimensionale Integration

1.1 (Riemann-)Integration im Mehrdimensionalen

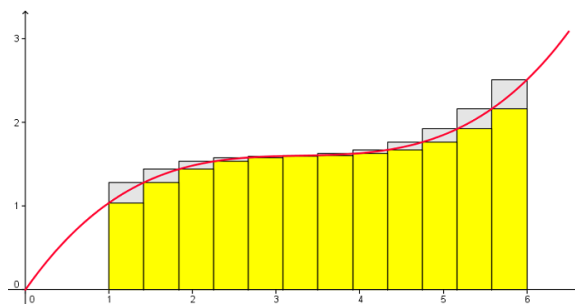
Idee des Riemann-Integrals in \mathbb{R} : Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ geeignet. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N - 1$, wobei

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

eine *Zerlegung von $[a, b]$* ist. Dann approximiert man $\int_a^b f(x)dx$ bzw. den Flächeninhalt unter dem Graphen von f durch die Summe der Flächeninhalte gewisser Rechte, nämlich

$$\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \quad (\text{Riemann-Summe})$$

wobei $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Man erwartet, dass diese Approximation gegen $\int_a^b f(x)dx$ geht, sofern die Feinheit der Zerlegung gegen Null geht. (Dies ist auch der Fall für Riemann-integrierbare Funktionen.)



Um diese Konstruktion für mehrdimensionale Funktionen zu erweitern, ersetzt man Intervalle durch Quader in \mathbb{R}^n . Dazu benötigen wir:

Definition 1.1 (Quader, Riemann-Summe, Oszillation)

(i) Zu $j = 1, \dots, n$ seien $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ mit $a_j < b_j$ gegeben. Dann heißt

$$Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

ein (achsenparalleler) Quader und $\text{vol}(Q) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ sein Volumen.

(ii) Unter einer Zerlegung Z eines Quaders Q verstehen wir eine Zusammenfassung von Zerlegungen $a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \dots < x_{j,N} = b_j$ von $[a_j, b_j]$ für alle $j = 1, \dots, n$, wobei $N \in \mathbb{N}$.

(iii) Für einen Quader Q und eine Zerlegung Z von Q heißt jedes $P = \prod_{j=1}^n [x_{j,k_j}, x_{j,k_j+1}]$ (mit $k_j \in \{0, \dots, N-1\}$ für alle $j = 1, \dots, n$) Teilquader von Q zur Zerlegung Z und man setzt

$$Q_Z := \{P : P \text{ ist Teilquader von } Q \text{ zur Zerlegung } Z\}.$$

Sind Z, Z' zwei Zerlegungen von Q , so heißt Z' feiner als Z (oder eine Verfeinerung von Z), wenn es für alle $P' \in Q_{Z'}$ ein $P \in Q_Z$ gibt mit $P' \subseteq P$.

(iv) Sei Q ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von Q . In jedem Teilquader $P \in Q_Z$ sei ein beliebiger Punkt $\xi \in P$ gewählt. Die Riemannsche Summe von f bezüglich der Zerlegung Z und zu den Punkten $\{\xi_P : P \in Q_Z\}$ ist dann

$$R_Z(f) := \sum_{P \in Q_Z} f(\xi_P) \text{vol}(P).$$

(v) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Oszillation (oder: Schwankung) von f ist

$$\text{osc}_D(f) := \sup_{x,y \in D} |f(x) - f(y)|.$$

(vi) Ist Q ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z eine Zerlegung von Q , dann ist die Schwankungssumme von f zur Zerlegung Z definiert als

$$D_Z(f) := \sum_{P \in Q_Z} \text{osc}_P(f) \text{vol}(P).$$

Bemerkung 1.2 Sind Z, Z' zwei Zerlegungen von Q , so gibt eine Zerlegung \tilde{Z} von Q , die feiner als Z und Z' ist. Diese kann man z.B. dadurch erhalten, dass man für \tilde{Z} für die Zerlegungen des Intervall $[a_j, b_j]$ alle Zwischenstellen $a_j = x_{j,0} < \dots < x_{j,N} = b_j$ von Z und $a_j = x'_{j,0} < \dots < x'_{j,N'} = b_j$ in Z bzw. Z' vereinigt.

Für das folgende benötigen wir:

Lemma 1.3 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, Z_1, Z_2 Zerlegungen von Q und $R_{Z_1}(f), R_{Z_2}(f)$ Riemann-Summen bezüglich Z_1 bzw. Z_2 (und gewissen Punkten). Dann gilt

1. Ist Z_2 feiner als Z_1 , so gilt $|R_{Z_1}(f) - R_{Z_2}(f)| \leq D_{Z_1}(f)$.
2. $|R_{Z_1}(f) - R_{Z_2}(f)| \leq D_{Z_1}(f) + D_{Z_2}(f)$.

Beweis: Zu 1.: Wir nutzen, dass für alle $P \in Q_{Z_1}$ gilt $P = \bigcup_{P' \in P_{Z_2}} P'$ und

$$\text{vol}(P) = \sum_{P' \in P_{Z_2}} \text{vol}(P'),$$

wobei $P_{Z_2} = \{P' \in Q_{Z_2} : P' \subseteq P\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & |R_{Z_1}(f) - R_{Z_2}(f)| \\ &= \left| \sum_{P \in Q_{Z_1}} f(\xi_P) \operatorname{vol}(P) - \sum_{P' \in Q_{Z_2}} f(\xi_{P'}) \operatorname{vol}(P') \right| = \left| \sum_{P \in Q_{Z_1}} \sum_{P' \in P_{Z_2}} (f(\xi_P) - f(\xi_{P'})) \operatorname{vol}(P') \right| \\ &\leq \sum_{P \in Q_{Z_1}} \sum_{P' \in P_{Z_2}} \underbrace{|f(\xi_P) - f(\xi_{P'})|}_{\leq \operatorname{osc}_P(f)} \operatorname{vol}(P') \leq \sum_{P \in Q_{Z_1}} \operatorname{osc}_P(f) \operatorname{vol}(P). \end{aligned}$$

Zu 2.: Wegen Bemerkung 1.2 gibt es eine Zerlegung Z_3 von Q , die feiner als Z_1 und Z_2 ist. Wegen des ersten Teils gilt dann

$$|R_{Z_1}(f) - R_{Z_2}(f)| \leq |R_{Z_1}(f) - R_{Z_3}(f)| + |R_{Z_3}(f) - R_{Z_2}(f)| \leq D_{Z_1}(f) + D_{Z_2}(f). \quad \blacksquare$$

Definition 1.4 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader. Eine beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von Q gibt, für die $DZ(f) < \varepsilon$ ist.

Bemerkung: Nicht jede beschränkte Funktion ist Riemann-integrierbar. Ist z.B. $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{falls } x \in [0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$

so gilt $\operatorname{osc}_P(f) = 1$ für alle $P \in Q_Z$ und jede Zerlegung Z von $Q = [0, 1]^2$, da in jedem Intervall mit mehr als einem Punkt unendlich viele rationale und irrationale Punkte liegen. Deswegen ist $D_Z(f) = 1$ für jede Zerlegung Z von Q .

Satz 1.5 Ist f Riemann-integrierbar, so gibt es genau eine Zahl $S \in \mathbb{R}$, sodass für jede Zerlegung Z von Q und jede zugehörige Riemann-Summe $R_Z(f)$ gilt

$$|R_Z(f) - S| \leq D_Z(f).$$

Diese Zahl S heißt Riemann-Integral von f und wird mit $\int_Q f(x) dx$ bezeichnet.

Beweis: Existenz: Da f Riemann-integrierbar ist, gibt es eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von Q , sodass $D_{Z_n}(f) < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es seien $R_{Z_n}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, zugehörige Riemann-Summen (für gewisse Punkte). Dann ist $(R_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , da

$$|R_{Z_n}(f) - R_{Z_m}(f)| \leq D_{Z_n}(f) + D_{Z_m}(f) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

sofern $m, n > \frac{2}{\varepsilon}$ wegen Lemma 1.3.2, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig ist. Da \mathbb{R} vollständig ist, existiert $S := \lim_{n \rightarrow \infty} R_{Z_n}(f)$. Sei nun Z eine Zerlegung von Q und $R_Z(f)$ eine zugehörige Riemann-Summe. Dann gilt

$$|R_Z(f) - S| = \lim_{n \rightarrow \infty} |R_Z(f) - R_{Z_n}(f)| \leq D_Z(f) + \lim_{n \rightarrow \infty} D_{Z_n}(f) = D_Z(f).$$

Eindeutigkeit: Angenommen es gäbe eine weitere Zahl $S' \in \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft. Seien Z_n wie zuvor. Dann folgt

$$|S - S'| \leq |S - R_{Z_n}(f)| + |S' - R_{Z_n}(f)| \leq 2D_{Z_n}(f) \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und somit $S = S'$. ■

Das Riemann-Integral im \mathbb{R}^n hat ähnliche Eigenschaften wie das eindimensionale Riemann-Integral:

Lemma 1.6 (Eigenschaften des Riemann-Integrals)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f, g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_Q (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_Q f(x) dx + \beta \int_Q g(x) dx.$$

2. Gilt $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in Q$, so folgt

$$\int_Q g(x) dx \leq \int_Q f(x) dx.$$

Insbesondere gilt $\int_Q f(x) dx \geq 0$, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in Q$.

3. $|f|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_Q f(x) dx \right| \leq \int_Q |f(x)| dx.$$

4. $\text{vol}(Q) = \int_Q 1 dx$.

Beweis: Zu 1.: Ähnlich wie im Fall $n = 1$. Man zeigt die Aussage erst für die Riemann-Summen bzgl. einer Folge von Zerlegungen Z_n und betrachtet dann den Limes $n \rightarrow \infty$.

Zu 2./3.: Siehe 11. Übungsblatt.

Zu 4.: Dies folgt daraus, dass $\text{vol}(Q) = R_Z(1)$ für jede Zerlegung Z von Q . ■

Wie im Eindimensionalen gilt:

Satz 1.7 *Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis: Dies kann man mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von f zeigen. ■

Um Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ über allgemeinere Mengen A integrieren zu können, benötigen wir:

Definition 1.8 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge.*

1. A heißt Jordan-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Quader Q_1, \dots, Q_N , $N \in \mathbb{N}$, gibt, sodass

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^N Q_j \text{ und } \sum_{j=1}^N \text{vol}(Q_j) < \varepsilon.$$

2. A heißt Jordan-messbar, wenn ∂A eine Jordan-Nullmenge ist.

Bemerkungen 1.9 1. Jede endliche Menge $\{x_1, \dots, x_N\}$ ist eine Jordan-Nullmenge. Dazu wählt man z.B. für jedes $j = 1, \dots, N$ einen Quader Q_j mit $x_j \in Q_j$ und $\text{vol}(Q_j) < \frac{\varepsilon}{N}$.

2. Sind A, B Jordan-Nullmenge, so ist auch $A \cup B$ eine Jordan-Nullmenge. Ist A eine Jordan-Nullmenge und $B \subseteq A$, so ist auch B eine Jordan-Nullmenge.
 3. Sind A, B Jordan-messbar, so ist auch $A \cup B$ Jordan messbar, da $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ eine Jordan-Nullmenge ist.
 4. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^k$ beschränkt, $k < n$, so ist

$$A := M \times \{0\}^{n-k} := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_k) \in M\}$$

eine Jordan-Nullmenge. (Beweis: Übung)

5. Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $A \subseteq Q$ eine Jordan-Nullmenge, so kann man zeigen, dass $f(A)$ eine Jordan-Nullmenge ist. Insbesondere sind beschränkte Mengen von Hyperebenen

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x = c\}$$

für $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und Sphären

$$\partial B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$$

für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ Jordan-Nullmengen. Somit ist $B_r(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, Jordan-messbar.

6. $A := [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ ist nicht Jordan-messbar, da $\partial A = [0, 1]^2$ keine Jordan-Nullmenge ist. Dabei gilt $\partial A = [0, 1]^2$, weil für alle $x \in [0, 1]^2$ und $\varepsilon > 0$ gilt: $B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(x) \cap ([0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2) \neq \emptyset$.

Ein wichtiges Kriterium ist:

Satz 1.10 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, sodass die Menge der Unstetigkeitspunkte

$$U := \{x \in Q : f \text{ ist unstetig in } x\}$$

eine Jordan-Nullmenge ist. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis: Siehe z.B. Heuser: "Lehrbuch der Analysis – Teil 2", Abschnitt 199. ■

Beispiel: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. es gibt eine Zerlegung $a = x_0 < \dots < x_N = b$ von $[a, b]$, sodass $f|_{(x_j, x_{j+1})}$ für alle $j = 0, \dots, N - 1$ stetig ist, so ist f Riemann-integrierbar.

Nun wollen wir das Riemann-Integrale für Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ auf allgemeineren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren.

Definition 1.11 Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $A \subseteq Q$ Jordan-messbar. Dann heißt $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wenn f beschränkt ist und die Funktion $\tilde{f}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \in Q \setminus A, \end{cases} \quad (1.1)$$

Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definiert man

$$\int_A f(x) dx := \int_Q \tilde{f}(x) dx.$$

Schließlich ist das Volumen von A definiert als

$$\text{vol}(A) := \int_A 1 dx.$$

Bemerkung 1.12 Ist A eine Jordan-Nullmenge, so gilt $\text{vol}(A) = 0$.

Beweis: 12. Übungsblatt.

Folgerung 1.13 Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $A \subseteq Q$ Jordan-messbar und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, sodass die Menge U der Unstetigkeitspunkte von f eine Jordan-Nullmenge ist. Dann ist f Riemann-integrierbar. Insbesondere ist $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wenn f stetig ist.

Beweis: Die Menge der Unstetigkeitspunkte von \tilde{f} ist in $U \cup \partial A$ enthalten, was eine Jordan-Nullmenge ist, da U und ∂A Jordan-Nullmengen sind. Deswegen folgt die Aussage aus Satz 1.10. ■

Wichtige Eigenschaft vom Riemann-Integral über Jordan-messbare Menge sind in folgendem Satz zusammengefasst:

Satz 1.14 (Eigenschaften vom Riemann-Integral)

Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

1. $\alpha f + \beta g$ ist Riemann-integrierbar und

$$\int_S (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_S f(x) dx + \beta \int_S g(x) dx \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Ist $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in S$, so gilt

$$\int_S g(x) dx \leq \int_S f(x) dx.$$

3. $|f|: S \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |f(x)|$ ist Riemann-integrierbar und

$$\left| \int_S f(x) dx \right| \leq \int_S |f(x)| dx \leq \left(\sup_{x \in S} |f(x)| \right) \text{vol}(S)$$

4. Ist $S = A \cup B$, wobei A, B Jordan-messbar sind, so gilt

$$\int_S f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx.$$

Ist außerdem $A \cap B$ eine Jordan-Nullmenge, so gilt

$$\int_S f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

Beweis: Zu 1./2.: Folgt direkt aus Definition 1.11 und Lemma 1.6.

Zu 3.: Bis auf die letzte Abschätzung folgt dies aus Definition 1.11 und Lemma 1.6. Um die letzte Abschätzung zu zeigen, sei $M := \sup_{x \in S} |f(x)|$. Dann folgt aus den ersten zwei Aussagen und $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in S$

$$\int_S |f(x)| dx \leq \int_S M dx = M \int_S 1 dx = \left(\sup_{x \in S} |f(x)| \right) \text{vol}(S).$$

Zu 4.: Für $M = S, A, B, A \cap B$ sei $\tilde{f}_M: Q \rightarrow \mathbb{R}$ definiert las

$$\tilde{f}_M(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in M, \\ 0, & \text{falls } x \in Q \setminus M. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\tilde{f}_S(x) = \tilde{f}_A(x) + \tilde{f}_B(x) - \tilde{f}_{A \cap B}(x) \quad \text{für alle } x \in Q$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_S f(x) dx &= \int_Q \tilde{f}_S(x) dx = \int_Q \tilde{f}_A(x) dx + \int_Q \tilde{f}_B(x) dx - \int_Q \tilde{f}_{A \cap B}(x) dx \\ &= \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx - \int_{A \cap B} f(x) dx. \end{aligned}$$

Ist nun $A \cap B$ eine Jordan-Nullmenge, so folgt aus dem dritten Teil:

$$\left| \int_{A \cap B} f(x) dx \right| \leq \left(\sup_{x \in A \cap B} |f(x)| \right) \underbrace{\text{vol}(A \cap B)}_{=0} = 0.$$

■

1.2 Iterierte Integrale – der Satz von Fubini

Um Integrale im Mehrdimensionalen zu berechnen ist der folgende Satz von grundlegender Bedeutung:

Satz 1.15 (Iterierte Integrale: Satz von Fubini für Quader)

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^k$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ Quader und $f: P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine über den Quader $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^{k+m}$ Riemann-integrierbare Funktion. Wenn für jedes $x \in P$ das Riemann-Integral $\int_Q f(x, y) dy$ existiert, dann ist die Funktion $x \mapsto \int_Q f(x, y) dy$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_P \int_Q f(x, y) dy dx.$$

Beweis: Siehe z.B. Blatter: "Analysis 2", Satz (13.23). ■

Bemerkungen 1.16 1. Aus der Integrierbarkeit von f über $P \times Q$ folgt nicht die Existenz von $\int_Q f(x, y) dy$ für jedes $x \in P$. Ein Gegenbeispiel ist die Funktion

$$f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist integrierbar und $\int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(x, y) d(x, y) = 0$, denn bis auf die Jordan-Nullmenge $N = \{0\} \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ ist sie Null. Aber das Integral $\int_{[-1,1]} f(x, y) dy$ existiert nicht für $x = 0$, vgl. Bemerkung nach Definition 1.4.

2. Ist $f: P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind die Voraussetzung von Satz 1.15 wegen Folgerung 1.13 immer erfüllt, da dann auch $Q \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in P$ stetig ist.
3. Falls zusätzlich zu den Voraussetzung von Satz 1.15 für alle $y \in Q$ das Integral $\int_P f(x, y) dx$ existiert, so erhält man aus Satz 1.15 durch Vertauschen der Rollen von P und Q sowie x und y

$$\int_P \int_Q f(x, y) dy dx = \int_{P \times Q} f(x, y) d(x, y) = \int_Q \int_P f(x, y) dx dy$$

D.h. man darf die Reihenfolge der iterierten Integrale vertauschen. Die Voraussetzungen sind wiederum erfüllt, falls f stetig ist.

Folgerung 1.17 Es sei $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ ein Quader und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_Q f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

und die Reihenfolge der Integrale auf der rechten Seite darf beliebig vertauscht werden.

Beweis: Der Fall $n = 2$ folgt aus den vorangehenden Bemerkungen. Den Fall $n > 2$ beweist man leicht per Induktion mit Hilfe der vorangehenden Bemerkungen. ■

Beispiel 1.18 Wir betrachten $f: [1, 2] \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$. Dann ist f stetig und aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_{[1,2] \times [1,2]} \frac{1}{(x+y)^2} d(x, y) &= \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x+2} \Big|_{x=1}^2 = \ln \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch eine Variante vom Satz von Fubini über Jordan-messbare Mengen.

Satz 1.19 (Fubini für allgemeine Mengen)

Es seien $P \subseteq \mathbb{R}^k$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ Quader, $A \subseteq P \times Q$ Jordan-messbar, sodass für alle $x \in P$

$$A_x := \{y \in Q : (x, y) \in A\}$$

Jordan-messbar ist. Außerdem sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\int_{A_x} f(x, y) dy$ existiere für alle $x \in P$. Dann gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_P \int_{A_x} f(x, y) dy dx.$$

Außerdem gilt

$$\text{vol}(A) = \int_P \text{vol}(A_x) dx \quad (\text{Prinzip von Cavalieri})$$

Beweis: Es sei \tilde{f} wie in (1.1) definiert (mit $P \times Q$ statt P). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{A_x} f(x, y) dy &= \int_Q \tilde{f}(x, y) dy \quad \text{für alle } x \in P, \\ \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_{P \times Q} \tilde{f}(x, y) d(x, y). \end{aligned}$$

Somit folgt die erste Aussage direkt aus Satz 1.15. Für die zweite wählt man einfach $f \equiv 1$. ■

Bemerkung 1.20 Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall $k = m = 1$. Dann ist A_x häufig gleich einem Intervall $[a(x), b(x)]$ für stetig $a, b: P \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $a(x) \leq b(x)$ für alle $x \in P$) und es gilt

$$\begin{aligned} \int_A f(x, y) d(x, y) &= \int_P \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy dx \\ \text{vol}(A) &= \int_P (b(x) - a(x)) dx \end{aligned}$$

Beispiele 1.21 1. Es sei $A = \overline{B_r(0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}$, $r > 0$. Dann ist K Jordan-messbar, da $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$ eine Jordan-Nullmenge ist, vgl. Bemerkung 1.9.5. Für alle $x \in [-r, r]$ ist

$$A_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}].$$

Insbesondere ist A_x Jordan-messbar, da $\partial A_x = \{\pm\sqrt{r^2 - x^2}\}$ eine Nullmenge ist. Aus dem Satz 1.19 folgt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} f(x, y) dy dx$$

für jedes stetige $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sowie

$$\text{vol}(\overline{B_r(0)}) = \text{vol}(A) = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = r^2\pi,$$

wobei man $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ mit Hilfe von $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ und partieller Integration zeigen kann.

2. Es sei

$$S_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

der sogenannte *drei-dimensionale Simplex*. Dann gilt

$$\begin{aligned} (S_3)_x &= \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y, z \geq 0, y + z \leq 1 - x\}, \\ ((S_3)_x)_y &= \{z \in \mathbb{R}^1 : z \geq 0, z \leq 1 - x - y\} = [0, 1 - x - y] \end{aligned}$$

für alle $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1 - x]$ sowie $(S_3)_x)_y = \emptyset$ für $y \notin [0, 1 - x]$. Wendet man nun das Prinzip von Cavalieri zweimal an, erhält man

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_3) &= \int_0^1 \text{vol}((S_3)_x) dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \underbrace{\text{vol}((S_3)_x)_y}_{=1-x-y} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{1-x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x)^2 dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

1.3 Die Transformationsformel

Die Verallgemeinerung der Substitutionsregel im Eindimensionalen auf das Mehrdimensionale ist:

Satz 1.22 Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Psi: V \rightarrow U$ stetig differenzierbar und $A \subseteq V$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge. Wenn es eine Jordan-Nullmenge $N \subseteq A$ gibt, sodass $\Psi|_{A \setminus N}$ injektiv ist und $D\Psi(\xi)$ für alle $\xi \in A \setminus N$ invertierbar ist, dann gilt für jede stetige $f: \Psi(A) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Psi(A)} f(x) dx = \int_A f(\Psi(\xi)) |\det D\Psi(\xi)| d\xi.$$

Beweis: Siehe z.B. Blatter, "Analysis 2", Satz (13.36). ■

Beweisidee: Man zeigt zunächst

$$\text{vol}(\Psi(Q)) = \int_Q |\det D\Psi(\xi)| d\xi \quad (1.2)$$

für einen beliebigen Würfel $Q \subseteq A$ zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt daraus per Approximation mit Riemann-Summen. Um (1.2) zu zeigen, zerlegt man Q in endlich viele Würfel Q_1, \dots, Q_N mit Mittelpunkten x_1, \dots, x_N , sodass $Q_j \cap Q_k$ für alle $j \neq k$ eine Jordan-Nullmenge ist. Da Ψ stetig differenzierbar ist, gilt

$$\Psi(x) = \underbrace{\Psi(x_j) + D\Psi(x_j)(x - x_j)}_{=: L_j(x)} + o(\|x - x_j\|) \quad \text{für alle } x \in Q_j$$

wobei $L_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear ist und der Fehler $o(\|x - x_j\|)$ sehr klein wird, wenn Q_j genügend klein ist. Daraus folgt

$$\text{vol}(\Psi(Q_j)) \approx \text{vol}(L_j(Q_j)) = \text{vol}(D\Psi(x_j)Q) = \det(D\Psi(x_j)) \text{vol}(Q) \approx \int_{Q_j} \det(D\Psi(x)) dx,$$

da die Determinante $\det B$ die Volumenveränderung eines Würfels unter der linearen Abbildung $x \mapsto Bx$ beschreibt und $\det(D\Psi(x)) \approx \det(D\Psi(x_0))$ für $x \in Q_j$ und kleine Würfel Q_j . Daraus folgt

$$\text{vol}(\Psi(Q)) = \sum_{j=1}^N \text{vol}(\Psi(Q_j)) \approx \sum_{j=1}^N \int_{Q_j} \det(D\Psi(x)) dx = \int_Q \det(D\Psi(x)) dx.$$

Beispiele 1.23 Es sei $K = \overline{B_R(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$ für $R > 0$ und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

1. Es sei $n = 2$. Dann ist $K = \Psi(A)$ für $\Psi: [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für alle } r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi].$$

und $A = [0, R] \times [0, 2\pi]$. Sei $A^\circ = (0, R) \times (0, 2\pi)$. Dann ist $\Psi: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv und $A \setminus A^\circ = \partial A$ eine Nullmenge, da A ein Quader und somit Jordan-messbar ist. Somit folgt aus Satz 1.22 und Satz 1.15

$$\int_K f(x) dx = \int_A \underbrace{f(\Psi(r, \varphi))}_{=: \tilde{f}(r, \varphi)} \underbrace{|\det D\Psi(r, \varphi)|}_{=: r} d(r, \varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r, \varphi) r d\varphi dr \quad (1.3)$$

Für $f \equiv 1$ erhält man insbesondere

$$\text{vol}(K) = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 \cdot r d\varphi dr = 2\pi \int_0^R r dr = \pi R^2.$$

2. Es sei $n = 3$. Dann ist $K = \Psi(A)$ für $\Psi: [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (r, \theta, \phi) \in A = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

vgl. 7. Übungsblatt, Aufgabe 4.

Dann ist wiederum Ψ auf $A^\circ = (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ injektiv und aus Satz 1.22 und Satz 1.15 folgt

$$\int_K f(x) dx = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\Psi(r, \theta, \phi)) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr, \quad (1.4)$$

da

$$\begin{aligned} \det D\Psi(r, \theta, \phi) &= \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \det \underbrace{\begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix}}_{=r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)} \\ &\quad - r \sin \theta \det \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix}}_{=r \sin(\theta)^2} = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

1.4 Oberflächenintegrale

Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir wollen ein Integral $\int_M f(x) d\sigma(x)$ über M definieren, sodass wir für $f \equiv 1$ die Oberfläche von M erhalten.

Definition 1.24 (Oberflächenintegral in einem Kartengebiet)

Es sei $\varphi: V \rightarrow M$ eine Parameterdarstellung in einer Umgebung U von $a \in M$. Außerdem sei $A \subseteq M \cap U$, sodass $\varphi^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^k$ Jordan-messbar ist. Dann heißt $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wenn

$$\int_A f(x) d\sigma(x) := \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(\xi)) \sqrt{\det(D\varphi(\xi)^T D\varphi(\xi))} d\xi$$

existiert (d.h. der Integrand auf der rechten Seite ist Riemann-integrierbar über $\varphi^{-1}(A)$). Dabei heißt $\det(D\varphi(\xi)^T D\varphi(\xi))$ Gramsche Determinante. Außerdem bezeichnet

$$\text{vol}_k(A) := \int_A 1 d\sigma(x)$$

das k -dimensionale Volumen von A (die Oberfläche von A , falls $k = 2$).

Bemerkung 1.25 (zur Gramschen Determinante)

Sei $A = D\varphi(\xi)$. Falls

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } B \in \mathbb{R}^{k \times k},$$

so gilt

$$A^T A = (B^T \ 0) \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = B^T B$$

und $\det A^T A = \det B^T B = \det B^T \det B = \det(B)^2$. Das heißt $\sqrt{\det A^T A} = |\det B|$. Dabei beschreibt $|\det B|$ das *Volumen vom Parallelepipiped* (Parallelogramm, falls $k = 2$), welches von den Spalten von B aufgespannt wird:

$$P = \{Bv : v \in [0, 1]^k\}.$$

Im allgemeinen Fall kann man eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ finden, sodass $UA = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$

bzw. $A = U^T \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ für ein $B \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Dann gilt

$$A^T A = (B^T \ 0) \underbrace{UU^T}_{=I} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = B^T B$$

und entsprechend

$$\sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det B^2} = |\det B|.$$

Im allgemeinen Fall setzen wir das Integral aus endlich vielen Stücken zusammen, welche jeweils in einem Kartengebiet enthalten sind.

Definition 1.26 *Es sei $M = \bigcup_{j=1}^N A_j$, sodass $A_j, j = 1, \dots, N$, paarweise disjunkt sind und es für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ eine Parameterdarstellung $\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ von M gibt mit $A_j \subseteq \varphi_j(U_j)$ und $\varphi_j^{-1}(A_j) \subseteq \mathbb{R}^k$ Jordan-messbar ist. Dann ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wenn $f|_{A_j}: A_j \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Ist dies der Fall, so ist*

$$\begin{aligned} \int_M f(x) d\sigma(x) &:= \sum_{j=1}^N \int_{A_j} f(x) d\sigma(x) \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} f(\varphi_j(\xi)) \sqrt{\det(D\varphi_j(\xi)^T D\varphi_j(\xi))} d\xi \end{aligned}$$

das Riemann-Integral von f über M . $\text{vol}_k(M) := \int_M 1 d\sigma(x)$ ist das k -dimensionale Volumen von M .

Beispiel 1.27 Es sei $g: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar und

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in [a, b], \|(x_1, x_2)\| = g(x_3)\}.$$

Dann beschreibt M eine sogenannte *Rotationsfläche*. M ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 und $M = \varphi(V)$ für $\varphi: [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} g(z) \cos \theta \\ g(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (\theta, z) \in V := [0, 2\pi] \times [a, b].$$

Wählt man nun $A_1 = \varphi([0, \pi] \times [a, b])$, $A_2 = \varphi([\pi, 2\pi] \times [a, b])$, so gilt $M = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und A_1, A_2 sind Jordan-messbar, da der Rand gleich dem Rand eines Quaders ist, welches eine Jordan-Nullmenge ist. Außerdem gilt

$$D\varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -g(z) \sin \theta & g'(z) \cos \theta \\ g(z) \cos \theta & g'(z) \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det D\varphi(\theta, z)^T D\varphi(\theta, z) = \det \begin{pmatrix} g(z)^2 & 0 \\ 0 & 1 + g'(z)^2 \end{pmatrix} = g(z)^2(1 + g'(z)^2).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_M f(x) dx &= \int_{\varphi^{-1}(A_1)} f(\varphi(\theta, z)) \sqrt{\det D\varphi(\theta, z)^T D\varphi(\theta, z)} d(\theta, z) \\ &\quad + \int_{\varphi^{-1}(A_2)} f(\varphi(\theta, z)) \sqrt{\det D\varphi(\theta, z)^T D\varphi(\theta, z)} d(\theta, z) \\ &= \int_a^b \int_0^\pi f(\varphi(\theta, z)) g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} d\theta dz + \int_a^b \int_\pi^{2\pi} f(\varphi(\theta, z)) g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} d\theta dz \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta, z)) g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} d\theta dz \end{aligned}$$

für alle Riemann-integrierbaren $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Für $g(z) = R$ für alle $z \in [a, b]$ ist M der Mantel eines Zylinders mit Radius R und Höhe $b - a$ man erhält

$$\text{vol}_2(M) = \int_a^b \int_0^{2\pi} R d\theta dz = 2\pi R(b - a).$$

Bemerkung: Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine geschlossene Kurve, so heißt γ *überschneidungsfrei*, wenn $\gamma|_{[a,b]}$ injektiv ist.

Beispiel 1.28 Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine geschlossene, überschneidungsfreie, reguläre und stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma'(a) = \gamma'(b)$. Dann ist $M = \gamma([a, b])$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit und

$$\int_M f(x) d\sigma(x) = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

für alle Riemann-integrierbaren $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. (Beweis: Übung)

Bemerkung 1.29 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte k -dimensionale, so gibt es immer endlich viele Parametrisierungen $\varphi_j: U_j \rightarrow M$, $j = 1, \dots, N$, sodass $M = \bigcup_{j=1}^N \varphi_j(U_j)$. Dazu kann man dann leicht A_j , $j = 1, \dots, N$, konstruieren, die die Bedingungen von Definition 1.26 erfüllen.

Untermannigfaltigkeiten treten häufig als Ränder von geeigneten offenen Mengen auf:

Definition 1.30 (Gebiet, C^1 -Rand, äußere Normale)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt Ω Gebiet, wenn Ω offen ist und es für alle $x, y \in \Omega$ eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Ω heißt Gebiet mit C^1 -Rand, wenn es für alle $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\Omega \cap U = \{x \in U : g(x) > 0\}$$

sowie $\nabla g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ mit $g(x) = 0$ gilt. Schließlich heißt

$$\nu(x) = -\frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}, \quad x \in U \cap \partial\Omega,$$

äußere Normale von x .

Bemerkung 1.31 Wegen Folgerung 1.107 aus “Analysis II für Physiker” ist $\{x \in U : g(x) = 0\}$ eine $(n-1)$ -dimensionale, differenzierbar Untermannigfaltigkeit. Außerdem steht $\nu(x)$ senkrecht auf $T_x\partial\Omega$ für alle $x \in \partial\Omega$. Mit Hilfe von

$$g(x) = \underbrace{\nabla g(x_0)}_{\neq 0} \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \quad \text{für } x \rightarrow x_0$$

für $x_0 \in U$ mit $g(x_0) = 0$ kann man leicht zeigen, dass

$$\partial\Omega \cap U = \{x \in U : g(x) = 0\}.$$

Beispiele 1.32 1. Es sei $\Omega = B_R(x_0)$ für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ sowie $g: U := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = R^2 - \|x - x_0\|^2$. Dann gilt

$$\Omega = \{x \in U : g(x) > 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in U : g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = R\},$$

wobei $\nabla g(x) = -2(x - x_0) \neq 0$ für alle $x \neq x_0$. Somit ist Ω ein Gebiet mit C^1 -Rand und äußeren Normalen

$$\nu(x) = -\frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega.$$

Außerdem gilt $T_x\partial\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot (x - x_0) = 0\}$ für alle $x \in \partial\Omega$.

2. Es sei $\Omega = \mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ der sogenannte obere Halbraum. Dann gilt für $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x_n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

wobei $\nabla g(x) = e_n \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Außerdem ist $\nu(x) = -e_n$ die äußere Normale von Ω für alle $x \in \partial\Omega$ und es gilt $T_x\partial\Omega = \{y \in \mathbb{R}^n : -y \cdot e_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ für alle $x \in \partial\Omega$.

1.5 Uneigentliche Riemann-Integrale

Ein Nachteil des Riemann-Integrals ist, dass nur beschränkte (und Riemann-integrierbare) Funktionen über beschränkte Mengen integriert werden können. So sind z.B. Integrale über \mathbb{R}^n oder das Integral für die unbeschränkte Funktion

$$f: \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < \|x\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha},$$

wobei $\alpha > 0$, nicht als Riemann-Integral definiert. Solche Integrale kann man aber ähnlich wie im Eindimensionalen als geeignete Grenzwerte von Riemann-Integralen bzw. uneigentliche Riemann-Integrale definieren. Wir wollen dies nicht systematisch diskutieren sondern nur kurz zwei Spezialfälle betrachten:

Integrale über \mathbb{R}^n : Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gebe eine Konstante C , sodass

$$\int_{B_R(0)} |f(x)| dx \leq C \quad \text{für alle } R > 0.$$

Dann existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} f(x) dx$$

Beispiel: Es sei $n = 2$. Dann folgt aus (1.3)

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} e^{-\|x\|^2} dx &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = \pi \int_0^R 2re^{-r^2} dr \\ &= \pi \left[-e^{-r^2} \right]_{r=0}^R = \pi(1 - e^{-R^2}) \leq \pi. \end{aligned}$$

Somit existiert das uneigentlich Riemann-Integral und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|x\|^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi \left[-e^{-r^2} \right]_{r=0}^R = \pi.$$

Integrale mit einer Singularität: Es sei $f: \overline{B_1(0)} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gebe eine Konstante C , sodass

$$\int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} |f(x)| dx \leq C \quad \text{für alle } \varepsilon \in (0, 1).$$

$$\int_{B_1(0)} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} f(x) dx$$

Beispiel: Es sei $n = 3$ und $0 < \alpha < 3$. Dann folgt aus (1.4)

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx &= \int_\varepsilon^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \theta}{r^\alpha} d\phi d\theta dr = 4\pi \int_\varepsilon^1 r^{2-\alpha} dr \\ &= \frac{4\pi}{3-\alpha} \underbrace{(1 - \varepsilon^{3-\alpha})}_{\rightarrow \varepsilon \rightarrow 0 1} \leq \frac{4\pi}{3-\alpha} \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \in (0, 1)$. Somit existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx = \frac{4\pi}{3-\alpha}$$

1.6 Integralsätze im \mathbb{R}^n

Satz 1.33 (Gauß)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$, $u: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar sowie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand und äußeren Normalen ν sowie $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) \, d\sigma(x). \quad (1.5)$$

Bemerkungen 1.34 1. Der Satz verallgemeinert den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\int_a^b u'(x) \, dx = u(b) - u(a),$$

dabei ist $\operatorname{div} u(x) = u'(x)$ für stetig differenzierbare $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial[a, b] = \{a, b\}$, $\nu(b) = 1$, $\nu(a) = -1$ und $u(b) - u(a)$ entspricht $\int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) \, d\sigma(x)$.

2. Beschreibt $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ den *Fluss einer Größe* wie z.B. die Konzentration eines Stoffes, so beschreibt

$$\int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) \, d\sigma(x)$$

den Gesamtfluss der Größe durch den Rand des Gebietes Ω , d.h. wieviel von der Größe durch den Rand des Gebietes rein- bzw. rausfließt. Der Satz von Gauß besagt, dass der Gesamtfluss gleich $\int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) \, dx$ ist. Ist $\operatorname{div} u(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$, so gilt insbesondere

$$\int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) \, d\sigma(x) = 0,$$

d.h. es muss genauso viel durch den Rand $\partial\Omega$ in Ω reinfließen wie rausfließen. Deswegen heißt u in diesem Fall auch *Quellen-frei*.

Beispiel 1.35 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand, $a \in \mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ und $u: \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ mit $u(x) = \frac{x-a}{\|x-a\|^n}$ für alle $x \neq a$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} u(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{vol}_{n-1}(\partial B_1(0)) & \text{falls } a \in \Omega, \\ 0 & \text{falls } a \notin \Omega. \end{cases}$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\operatorname{div} u(x) = \underbrace{\operatorname{div}(x-a)}_{=n} \frac{1}{\|x-a\|^n} + (x-a) \cdot \underbrace{\nabla \frac{1}{\|x-a\|^n}}_{=-n \frac{1}{\|x-a\|^{n+1}} \frac{x-a}{\|x-a\|}} = 0$$

für alle $x \neq a$, da $\nabla \|x-a\| = \frac{x-a}{\|x-a\|}$. Somit folgt die Aussage, falls $a \notin \Omega$, direkt aus dem Satz von Gauß.

Achtung: Falls $a \in \Omega$, so ist der Satz von Gauß nicht auf Ω anwendbar, da u in a nicht definiert ist bzw. u keine stetig differenzierbare Funktion auf Ω ist. Ansonsten würde wiederum folgen

$$\int_{\partial\Omega} u(x) \cdot \nu(x) \, d\sigma(x) = 0,$$

was nicht der Fall ist.

Falls $a \in \Omega$, gibt es ein $r > 0$, sodass $\overline{B_r(a)} \subseteq \Omega$, da Ω offen ist. Wir wenden nun den Satz von Gauß auf $\tilde{\Omega} := \Omega \setminus B_r(a)$ an und erhalten

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \nu(x) \cdot u(x) d\sigma(x) = \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div} u(x) dx = 0,$$

wobei $\partial\tilde{\Omega} = \partial\Omega \cup \partial B_r(a)$ und $\partial\Omega$ und $\partial B_r(a)$ disjunkt sind und $\nu(x) = -\frac{x-a}{\|x-a\|}$ für alle $x \in \partial B_r(a)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) d\sigma(x) + \int_{\partial B_r(a)} \underbrace{\nu(x) \cdot u(x)}_{=-\frac{x-a}{\|x-a\|} \cdot \frac{x-a}{\|x-a\|^n} = -r^{1-n}} d\sigma(x) \\ \Rightarrow \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) d\sigma(x) &= r^{1-n} \operatorname{vol}_{n-1}(\partial B_r(0)). \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\operatorname{vol}_{n-1}(\partial B_r(0)) = \begin{cases} 2\pi r = r \operatorname{vol}_1(\partial B_1(0)) & \text{falls } n = 2, \\ 4\pi r^2 = r^2 \operatorname{vol}_2(\partial B_1(0)) & \text{falls } n = 3, \end{cases}$$

wobei man die Oberfläche im Fall $n = 3$ z.B. mit Hilfe von Kugelkoordinaten berechnen kann. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: In der Elektrostatik (und im Fall $n = 3$) beschreibt u das elektrische Feld einer Punktladung (mit Einheitsstärke) und $\int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) d\sigma(x)$ beschreibt den Fluss des elektrischen Feldes durch die Fläche $\partial\Omega$.

Beweis von Satz 1.33: Den vollständigen Beweis findet man z.B. in Königsberger "Analysis II", Abschnitt 12.4 oder Goldhorn/Heinz: "Mathematik für Physiker 1". Hier wollen wir uns auf den Beweis im Fall

$$\Omega = \mathbb{R}_\gamma^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\},$$

wobei $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, und $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, sodass es ein $R > 0$ gibt mit $u(x) = 0$ für alle $|x| \geq R$. Der Beweis im allgemeine Fall kann auf diesen Fall zurückgeführt werden. Hierbei ist Ω ein Gebiet mit C^1 -Rand, da

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$$

für $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Somit ist

$$\nu(x) = -\frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla \gamma(x')\|^2}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \gamma(x') \\ \vdots \\ \partial_{x_{n-1}} \gamma(x') \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega,$$

wobei $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n_\gamma} \operatorname{div} u(x) dx &= \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\gamma(x')}^\infty \partial_{x_j} u_j(x', x_n) dx_n dx' \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\partial_{x_j} \int_{\gamma(x')}^\infty u_j(x', x_n) dx_n - u_j(x', x_n) \partial_{x_j} \gamma(x') \right] dx' \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_n(x', \gamma(x')) dx' \\
 &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \int_{-R}^R \cdots \int_{-R}^R \partial_{x_j} \int_{\gamma(x')}^\infty \underbrace{u_j(x', x_n)}_{=0, \text{ falls } x_j = \pm R} dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1}_{=0} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu(x', \gamma(x')) \cdot u(x', \gamma(x')) \sqrt{1 + \|\nabla \gamma(x')\|^2} dx'.
 \end{aligned}$$

Dabei ist $\partial\Omega = \operatorname{graph}(\gamma)$ und man kann zeigen, dass $1 + \|\nabla \gamma(x')\|^2$ die Gramsche Determinante der Parametrisierung $x' \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ \gamma(x') \end{pmatrix}$ ist. Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n_\gamma} \operatorname{div} u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \nu(x) \cdot u(x) d\sigma(x).$$

■

Folgerung 1.36 (Partielle Integration im \mathbb{R}^n)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare und Ω ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand, sodass $\Omega \cup \partial\Omega \subseteq U$. Dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} f(x) g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_j(x) d\sigma(x) - \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j} g(x) dx. \quad (1.6)$$

Beweis: Es sei $u: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert als $u(x) = f(x)g(x)e_j$ für alle $x \in U$. Dann gilt

$$\operatorname{div} u(x) = \partial_{x_j} (f(x)g(x)) = \partial_{x_j} f(x)g(x) + f(x)\partial_{x_j} g(x)$$

für alle $x \in U$ sowie $u(x) \cdot \nu(x) = f(x)g(x)\nu_j(x)$. Somit folgt aus dem Satz von Gauß

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} f(x) g(x) dx + \int_{\Omega} f(x) \partial_{x_j} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_j(x) d\sigma(x),$$

woraus die Behauptung folgt.

■

Folgerung 1.37 (Greensche Formeln)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare und Ω ein beschränktes

Gebiet mit C^1 -Rand, sodass $\Omega \cup \partial\Omega \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f(x)\Delta g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\nabla g(x) \cdot \nu(x) d\sigma(x) - \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) dx \quad (1.7)$$

$$\int_{\Omega} [f(x)\Delta g(x) - g(x)\Delta f(x)] dx = \int_{\partial\Omega} [f(x)\nabla g(x) - g(x)\nabla f(x)] \cdot \nu(x) d\sigma(x) \quad (1.8)$$

Beweis: (1.7) folgt direkt aus (1.5) angewendet auf $u(x) = f(x)\nabla g(x)$, wobei

$$\operatorname{div}(u(x)) = f(x)\Delta g(x) + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)$$

wegen Lemma 1.36 der "Analysis II für Physiker". (1.8) folgt aus (1.7), wobei man einmal die Rollen von f und g vertauscht. ■

Beispiel 1.38 Es seien Ω, U wie im Satz 1.33 und $u: U \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, t \in [0, T]$$

löst und für die die (Dirichlet-)Randbedingung

$$u(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega, t \in [0, T]$$

gilt. Dabei ist $\Delta u(x, t) = \operatorname{div}_x \nabla_x u(x, t) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u(x, t)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla_x u(x, t)|^2 dx \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

Beweis von (1.9): Da $(x, t) \mapsto u(x, t)^2$ stetig differenzierbar bzgl. $x \in U, t \in [0, T]$, kann man Integration und Differentiation auf der linken Seite vertauschen und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx &= \int_{\Omega} u(x, t) \underbrace{\partial_t u(x, t)}_{=\Delta u(x, t)} dx = \int_{\Omega} u(x, t) \Delta u(x, t) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla u(x, t) dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{u(x, t)}_{=0} \nabla u(x, t) \cdot \nu(x) d\sigma(x) \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \quad \text{für alle } t \in [0, T], \end{aligned}$$

wobei wir (1.7) benutzt haben.

Bemerkung: Aus (1.9) folgt, dass die Funktion

$$[0, T] \ni t \mapsto \int_{\Omega} u(x, t)^2 dx \in [0, \infty)$$

monoton fallend ist. Ist nun z.B. $u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$, so folgt

$$\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

sowie $u(x, t)^2 = 0$ bzw. $u(x, t) = 0$ für alle $x \in \Omega$, $t \in [0, T)$, da ein Integral über eine nicht negative, stetige Funktion genau dann Null ist, wenn die Funktion Null ist. D.h. die Wärmeleitungsgleichung mit der obigen Randbedingung und Anfangswert $u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$ hat die eindeutige Lösung $u(x, t) = 0$ für alle $x \in \Omega$, $t \in [0, T)$. Mathematiker nennen $\int_{\Omega} u(x, t)^2 dx$ die *Energie zum Zeitpunkt t* . Beschreibt u die Wärme in einem Körper Ω zur Zeit t , so ist dies aber nicht die physikalische Energie des Systems.

Definition 1.39 (Positiver Umlaufsinn)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand und äußerer Normalen ν . Dann ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \partial\Omega$ eine Parametrisierung von $\partial\Omega$ in mathematisch positiver Richtung, wenn γ eine reguläre, geschlossene, überschneidungsfreie Kurve ist, $\gamma(I) = \partial\Omega$ und

$$\det(\nu(\gamma(t)) | \gamma'(t)) > 0 \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Bemerkung: In diesem Fall gilt $\nu(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix}$.

Satz 1.40 (Green bzw. Stokes in der Ebene)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit C^1 -Rand, sodass $\bar{\Omega} \subseteq U$. Außerdem existiere eine Parametrisierung $\gamma: I \rightarrow \partial\Omega$ des Randes in mathematisch positiver Richtung. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_{\Omega} (\partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x)) dx. \tag{1.10}$$

Beweis: Es gilt $\partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x) = \operatorname{div} G(x)$ für $G(x) := \begin{pmatrix} F_2(x) \\ -F_1(x) \end{pmatrix}$. Deswegen folgt aus Satz 1.33 und Beispiel 1.28

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x)) dx &= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} F_2(x) \\ -F_1(x) \end{pmatrix} \cdot \nu(x) d\sigma(x) \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} F_2(x) \\ -F_1(x) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} F(x) \cdot dx \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.41 Der Satz gilt (fast) genauso, wenn $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$, wobei Γ_j , $j = 1, \dots, N$ disjunkt seien und die Bilder von regulären, geschlossenen, überschneidungsfreien Kurve $\gamma_j: I_j \rightarrow \partial\Omega$ sind, sodass

$$\det(\nu(\gamma_j(t)) | \gamma'_j(t)) > 0 \quad \text{für alle } t \in I_j, j = 1, \dots, N.$$

In diesem Fall muss (1.10) durch

$$\sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} F(x) \cdot dx = \int_{\Omega} (\partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x)) dx$$

ersetzt werden. Der Beweis des Satzes von Green lässt sich leicht auf diesen Fall übertragen.

Beispiel 1.42 Es sei $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x) = \frac{1}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit C^1 -Rand und $0 \in \Omega$ sowie $\gamma: I \rightarrow \partial\Omega$ eine Parametrisierung des Randes von Ω . Dann gilt

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = 2\pi$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \varepsilon\} \subseteq \Omega$ und $\gamma_\varepsilon: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos t \\ -\varepsilon \sin t \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Außerdem sei $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(0)$. Dann ist $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(0)$, wobei γ_ε eine Parametrisierung von $\partial B_\varepsilon(0)$ ist. Außerdem gilt

$$\det(\nu(\gamma_\varepsilon(t))|\gamma'_\varepsilon(t)) = \det \begin{pmatrix} -\cos t & -\varepsilon \sin t \\ \sin t & -\varepsilon \cos t \end{pmatrix} = \varepsilon > 0$$

da $\nu(x) = -\frac{x}{\|x\|}$ die äußere Normale von $\partial\Omega_\varepsilon$ für $x \in \partial B_\varepsilon(0)$ ist. Somit folgt aus der vorangehenden Bemerkung

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx + \int_{\gamma_\varepsilon} F(x) \cdot dx = \int_{\Omega} (\partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x)) dx = 0,$$

da

$$\partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x) = \partial_{x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - \partial_{x_2} \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0,$$

vgl. Beispiel 1.76.2 der Vorlesung “Analysis II für Physiker. Zusätzlich gilt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} F(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} \varepsilon \sin t \\ \varepsilon \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varepsilon \sin t \\ -\varepsilon \cos t \end{pmatrix} dt = - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Jedes stetig differenzierbare (ebene) Vektorfeld $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann man ein Vektorfeld $\tilde{F}: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

zuordnen. Dann gilt

$$\text{rot } \tilde{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} F_2(x) - \partial_{x_2} F_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in U \times \mathbb{R}.$$

Außerdem kann man $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ als Fläche im \mathbb{R}^3 auffassen. Wir werden sehen, dass deswegen der Satz von Green ein Spezialfall des folgenden klassischen Satzes von Stokes ist. Dazu benötigen wir aber:

Definition 1.43 (Orientierbare Fläche) *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann heißt M orientierbar. Wenn es eine stetige Funktion $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, sodass $\|N(x)\| = 1$ und $N(x) \cdot v = 0$ für alle $v \in T_x M$ und $x \in M$. N heißt Einheitsnormalenfeld von M .*

Bemerkung: Durch N wird festgelegt, was “oben” und “unten” auf der Fläche ist. Dabei “zeigt N nach oben”.

Analog zu Gebieten in \mathbb{R}^n definieren wir:

Definition 1.44 (Gebiete in Flächen)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit. Dann heißt $\Omega \subseteq M$ mit $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subseteq M$ ein Gebiet mit C^1 -Rand, wenn es für alle $x, y \in \Omega$ eine stetige Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ gibt mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und es für alle $a \in \bar{\Omega}$ eine Parametrisierung $\varphi: V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ in einer Umgebung U von a sowie ein stetig differenzierbares $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\Omega \cap U = \{\varphi(x) : x \in V \text{ und } g(x) > 0\}.$$

Im Folgenden sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit einem Einheitsnormalenfeld $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Omega \subseteq M$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand. Außerdem sei $d\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow d\Omega$ eine reguläre, stetig differenzierbare, geschlossene Kurve, sodass $\gamma([a, b]) = d\Omega$ und $\gamma|_{[a,b]}$ injektiv ist. $d\Omega$ wird auch als *Rand von Ω* bezeichnet (und oft auch ebenfalls mit $\partial\Omega$ bezeichnet). Es gibt nun zwei mögliche “Richtungen” $d\Omega$ zu durchlaufen nämlich γ und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, wenn τ eine orientierungsumkehrende Umparametrisierung ist. Wir fixieren die Umlaufsrichtung in folgender Weise:

Für alle $t \in [a, b]$ zeige $\nu(\gamma(t)) := \gamma'(t) \times N(\gamma(t))$ nach außen von Ω .

Hierbei zeigt $\nu(\gamma(t))$ nach außen, sofern

$$\nu(\gamma(t)) \cdot D\varphi(\gamma(t)) \frac{\nabla g(x_0)}{\|\nabla g(x_0)\|} < 0$$

wobei φ und g wie in Definition 1.44 (mit $a = \gamma(t)$) ist, $\det D\varphi(\gamma(t)) > 0$ gelte und $x_0 := \varphi^{-1}(\gamma(t))$.

Satz 1.45 (Stokes)

Es seien M, Ω, N, γ wie zuvor und $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $M \subseteq U$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_{\Omega} \text{rot } F(x) \cdot N(x) d\sigma(x).$$

Beweis: Siehe z.B. Goldhorn/Heinz: “Mathematik für Physiker 1”. ■

Beispiel 1.46 Sei $M = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $N(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für alle $x \in M$ und $\Omega = \{x \in M : x_3 > 0\}$ die "obere Hälfte" von M . Dann ist N ein stetiges Einheitsnormalenfeld von M , $\Omega \subseteq M$ ein Gebiet mit C^1 -Rand, $\bar{\Omega} = \{x \in M : x_3 \geq 0\}$ und $d\Omega = \{x \in M : x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. Somit ist $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow d\Omega$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

eine geschlossene, überschneidungsfreie, reguläre, stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma([0, 2\pi]) = d\Omega$ und

$$\nu(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]$$

Außerdem zeigt $\nu\gamma(t)$ nach außen von Ω , denn wählt man als Parametrisierung z.B.

$$\varphi(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\psi) \\ \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (\theta, \psi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi],$$

so gilt $\det D\varphi(\theta, \psi) = \sin \theta > 0$,

$$\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \neq 1\} = \{\varphi(\theta, \psi) : g(\theta, \psi) := \frac{\pi}{2} - \theta > 0\}$$

$d\Omega = \{\varphi(\frac{\pi}{2}, \psi) : \psi \in [0, 2\pi]\}$ und

$$\nu(\gamma(t)) \cdot D\varphi(\frac{\pi}{2}, \psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\psi) \\ 0 & \cos(\psi) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

für alle $\psi \in [0, 2\pi]$. Ist nun $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, so folgt aus

dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{rot } F(x) \cdot N(x) \, d\sigma(x) &= \int_{\gamma} F(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt = - \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0. \end{aligned}$$

2 Funktionentheorie

2.1 Holomorphe Funktionen / komplexe Differenzierbarkeit

Das Thema der Funktionentheorie ist das Studium von komplex differenzierbaren Funktionen $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dabei können wesentlich stärkere Aussagen gezeigt werden, als für (total) differenzierbare Funktionen $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition 2.1 Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen sei. Dann heißt f an der Stelle $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, wenn

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0, \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.1)$$

existiert. Ist f in jedem $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, so heißt f holomorph.

Bemerkung: Dabei existiert der Grenzwert in (2.1), falls es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für jede Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $z_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} z_0$, $z_k \in U \setminus \{z_0\}$ gilt:

$$\frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} a,$$

vgl. Vorlesung "Analysis I". Genauso wie in Analysis I gilt:

Lemma 2.2 1. Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist f stetig.

2. Es seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen sei.

Dann sind $f + g: U \rightarrow \mathbb{C}$, $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gilt für alle $z \in U$:

$$\begin{aligned} (f + g)'(z) &= f'(z) + g'(z) \\ (f \cdot g)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \end{aligned}$$

Ist $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, so ist $\frac{f}{g}: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gilt für alle $z \in U$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

3. Sind $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und gilt $f(U) \subseteq V$, so ist $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es gilt für alle $z \in U$:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

Beweis: Zu 1.: Das folgt sofort aus

$$f(z) - f(z_0) = \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\rightarrow z \rightarrow z_0, z \neq z_0 0} \underbrace{(z - z_0)}_{\rightarrow z \rightarrow z_0 0} = 0.$$

Zu 2./3.: Siehe 1. Übungsblatt (Analog zur Analysis I). ■

Beispiel 2.3 Man prüft leicht nach, dass $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = a$, $g(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $a \in \mathbb{C}$ holomorph sind und gilt:

$$f'(z) = 0, \quad g'(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Mit Lemma 2.2 folgt, dass jedes Polynom $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Gilt $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $a_k \in \mathbb{C}$, so gilt:

$$P'(z) = \sum_{k=1}^n a_k k z^{k-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

da $(z^k)' = k z^{k-1}$ (letzteres folgt aus der Produktregel).

Wesentlich mehr Beispiele erhalten wir durch *Potenzreihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.2}$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Für das Folgende sei

$$R := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$$

und

$$\varrho := \begin{cases} \frac{1}{R}, & \text{falls } R \in (0, \infty), \\ +\infty, & \text{falls } R = 0, \\ 0, & \text{falls } R = +\infty. \end{cases}$$

ϱ heißt *Konvergenzradius* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Satz 2.4 Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und ϱ wie zuvor. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, falls $|z| < \varrho$, und divergiert, falls $|z| > \varrho$. Außerdem ist $f : B_\varrho(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in B_\varrho(0)$ holomorph und:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \quad \text{für alle } z \in B_\varrho(0). \tag{2.3}$$

Bemerkung 2.5 Die Reihe in (2.3) konvergiert wegen des Wurzelkriteriums, da

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n| |z^{n-1}|} &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|z|^n}}{\sqrt[n]{|z|}} \\ &= \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{=R} \cdot |z| < 1 \end{aligned}$$

falls $|z| < \varrho$. Es sei bemerkt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r}$ für alle $r > 0$, siehe Vorlesung "Analysis I".

Beweis von Satz 2.4: Die Konvergenz bzw. Divergenz folgt aus dem Wurzelkriterium, da

$$|z| \geq \varrho \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \underbrace{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{=\frac{1}{\varrho}} \geq 1$$

falls $R > 0$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ falls $R = 0$ bzw. $\varrho = +\infty$.

Behauptung: Für alle $z \in B_\varrho(0)$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$$

Aus der Behauptung folgt der Satz.

Beweis: Wir nutzen für $h \neq 0$ und $n \geq 1$

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \quad (\text{Binomischer Lehrsatz})$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \underbrace{\binom{n}{1}}_n z^{n-1} &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k - \binom{n}{0} z^n - \binom{n}{1} z^{n-1} h^1}{h} \\ &= h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \right| &\leq \sum_{j=0}^{n-2} \underbrace{\binom{n}{j+2}}_{=\frac{n(n-1)(n-2)!}{(j+2)(j+1)j!(n-j-2)!}} |h|^j |z|^{n-j-2} \\
 &\leq n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} |h|^j |z|^{(n-2)-j} \\
 &= n(n-1) (|h| + |z|)^{n-2} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Für das Folgende sei $\delta > 0$ so, dass $|z| + \delta =: r < \rho$. Dann folgt, falls $0 < |h| < \delta$:

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \\
 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right)}_{=h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} (=0, \text{ falls } n=1)} \right| \\
 &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k} \right| \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| (n-1) n \underbrace{(|h| + |z|)^{n-2}}_{\leq r} \\
 &\leq |h| \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n(n-1) r^{n-2}}_{=: C(r) < \infty} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (\implies \text{Behauptung})
 \end{aligned}$$

Dabei ist $C(r) < \infty$, da

$$\begin{aligned}
 \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n-1) |a_n| r^{n-2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n-1} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{\sqrt[n]{r^2}} \\
 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \underbrace{r}_{< \frac{1}{R} = \varrho} < 1
 \end{aligned}$$

weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n-1} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r^2}$ ■

Beispiele 2.6

1. Für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{absolut}$$

Siehe Analysis I (folgt mit Quotientenkriterium oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$)
 Aus Satz 2.4 und $\rho = +\infty$ folgt, dass $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist mit

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \exp(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

wobei $e^w = \exp(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$. Aus Lemma 2.2 folgt somit

$$\cos'(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz} - (-e^{-iz})}{2i} = -\sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin'(z) = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Insbesondere sind $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Bemerkung 2.7 Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus Satz 1.3 folgt direkt, dass $F: B_\rho(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1} \quad \text{für alle } z \in B_\rho(z_0)$$

wobei ρ wie zuvor ist.

Beweis: Betrachte $\tilde{F}(w) = F(w + z_0)$. ■

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Motivation: Es sei $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann kann f mit der Abbildung $\tilde{f}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ identifiziert werden, wobei

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + iy) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{U}, \quad (2.4)$$

wobei $\tilde{U} := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u + iv \in U \right\}$.

Frage: Wie hängen komplexe Differenzierbarkeit von f und (reelle) Differenzierbarkeit von

\tilde{f} zusammen?

Erinnerung: \tilde{f} ist in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{U}$ (total) differenzierbar, falls es ein $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt mit

$$\tilde{f}(x + h_1, y + h_2) = \tilde{f}(x, y) + A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \varphi(h_1, h_2)$$

mit

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \frac{\varphi(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Dabei ist

$$A = \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y) & \partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) & \partial_y v(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

mit $u(x, y) := \tilde{f}_1(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) := \tilde{f}_2(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.
Für die Antwort auf die Frage benötigen wir:

Lemma 2.8 *Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann gibt es genau dann ein $w \in \mathbb{C}$ so dass*

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w \cdot (x + iy)) \\ \operatorname{Im}(w \cdot (x + iy)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

(das heißt A beschreibt die lineare Abbildung $z \mapsto w \cdot z$), wenn $a = d, b = -c$. In diesem Fall ist $w = a + ic$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

Beweis: “ \Rightarrow ”: Wähle $x = 1, y = 0$ bzw. $x = 0, y = 1$. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(iw) \\ \operatorname{Im}(iw) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} w \\ \operatorname{Re} w \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $a = \operatorname{Re}(w) = d, b = -\operatorname{Im}(w) = -c$.

“ \Leftarrow ”: Übung ■

Satz 2.9 *Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ und $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie in (2.4). Dann ist f genau dann komplex differenzierbar in z_0 , wenn \tilde{f} in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ total differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (2.6)$$

gelten, wobei $u(x, y) = \tilde{f}_1(x, y)$, $v(x, y) = \tilde{f}_2(x, y)$ bzw.

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{U} \text{ bzw. } x + iy \in U. \quad (2.7)$$

Außerdem gilt $f'(x_0 + iy_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0)$.

Beweis: “ \Rightarrow ”: Aus $f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ folgt $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot h + \varphi(h)$

mit $\varphi(h) := f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot h$ und $\left| \frac{\varphi(h)}{h} \right| \xrightarrow[\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}]{} 0$.

$$\xrightarrow{\text{Lemma 2.8}} \underbrace{\tilde{f}(x_0 + h_1, y_0 + h_2)}_{\hat{=} f(z_0+h)} = \tilde{f}(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \tilde{\varphi}(h_1, h_2) \quad (*)$$

mit $\tilde{\varphi}(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi(h_1 + ih_2) \\ \operatorname{Im} \varphi(h_1 + ih_2) \end{pmatrix}$ und $a+ci = f'(z_0)$, $h = h_1 + ih_2$, wobei $\frac{\tilde{\varphi}(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow 0} 0$.

Somit ist \tilde{f} total differenzierbar in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und (2.6) gilt wegen (2.5) und Lemma 2.8.

“ \Leftarrow ”: Ist \tilde{f} in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ total differenzierbar und gilt (2.6), so folgt aus (2.5) die Identität (*) mit $a = \partial_x u(x_0, y_0)$, $c = \partial_x v(x_0, y_0)$.

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{Lemma 2.8}} f(z_0 + h) = f(z_0) + w \cdot h + \varphi(h) \text{ mit } w = a + ic \\ &\implies \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \underbrace{a + ic}_{=w} + \frac{\varphi(h)}{h} \end{aligned}$$

mit $\varphi(h_1 + ih_2) = \tilde{\varphi}_1(h_1, h_2) + i\tilde{\varphi}_2(h_1, h_2)$ und $\frac{\varphi(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, da $\frac{\tilde{\varphi}(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} \rightarrow 0$ für $(h_1, h_2) \rightarrow 0$. Daraus folgt, dass f in z_0 komplex differenzierbar ist und

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = w + 0 = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0). \quad \blacksquare$$

Bemerkung 2.10 Wir sagen $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist *reell differenzierbar*, wenn $\tilde{f}: \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (total) differenzierbar.

1. (2.6) besagt, dass

$$D\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ -\partial_y v(x_0, y_0) & \partial_x v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

dabei gilt

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

für $r = \sqrt{a^2 + c^2}$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, sodass $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ und $\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$. Das heißt $D\tilde{f}(x_0, y_0)$ bzw. $z \mapsto (a + ic)z$ beschreibt eine *Drehstreckung* im $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Außerdem gilt

$$f'(z_0) = a + ic = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Erinnerung: Für alle $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eindeutige $r, s > 0$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$, sodass $z = se^{i\psi}$ und $w = re^{i\varphi}$. Dann gilt $zw = (rs)e^{i\varphi}e^{i\psi} = (rs)e^{i(\varphi+\psi)}$. D.h. Multiplikation mit w entspricht einer Drehung mit Winkel φ und Streckung um den Faktor r .

2. Ist f holomorph und \tilde{f} zweimal stetig differenzierbar, so folgt

$$\partial_x u(x, y) \stackrel{(2.6)}{=} \partial_y v(x, y) \implies \partial_x^2 u(x, y) = \partial_x \partial_y v(x, y)$$

sowie

$$\partial_y^2 u(x, y) \stackrel{(2.6)}{=} -\partial_x \partial_y v(x, y) \stackrel{\partial_x}{=} -\partial_x^2 u(x, y)$$

$$\implies \Delta u(x, y) := \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = 0$$

für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{U}$, das heißt u ist harmonisch in \tilde{U} . Analog zeigt man $\Delta v(x, y) = 0$.

Also sind Real- und Imaginärteil einer holomorphen (und zweimal stetig differenzierbaren) Funktion harmonisch. Dies kann genutzt werden, um die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ in einem zweidimensionalen Gebiet zu lösen. Das hat z.B. Anwendungen in der Elektrostatik und der Strömungsmechanik.

3. Im Folgenden werden wir $x + iy \in \mathbb{C}$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wieder identifizieren und f und U statt \tilde{f} und \tilde{U} schreiben.

Beispiel 2.11

1. Sei $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ sowie

$$\partial_x u(x, y) = 2x = \partial_y v(x, y) \quad , \quad \partial_y u(x, y) = -2y = -\partial_x v(x, y)$$

2. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z} = \underbrace{x}_{=u(x,y)} + i \underbrace{(-y)}_{=v(x,y)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Dann ist f reell differenzierbar (da Polynom) aber

$$\partial_x u(x, y) = 1 \neq \partial_y v(x, y) = -1$$

Das heißt (2.6) gilt nicht und $z \mapsto \bar{z}$ ist nicht holomorph! Diese (lineare) Abbildung beschreibt auch eine Spiegelung an der reellen Achse und ist somit keine Drehspiegelung.

2.2 Der Cauchysche Integralsatz

2.2.1 Kurvenintegrale

Definition 2.12 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sowie $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (2.8)$$

das Kurvenintegral über f längs γ .

Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ stückweise stetig differenzierbar, d.h. γ ist stetig und es gibt $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b, N \in \mathbb{N}$, so dass $\gamma_j: \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}: [t_j, t_{j+1}] \rightarrow U$ stetig differenzierbar für alle $j = 0, \dots, N-1$ ist, dann definiert man

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Bemerkung 2.13

1. Ist $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t) dt$$

in diesem Sinn ist (2.8) zu verstehen.

2. Sei $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Umparametrisierung (d.h. τ ist stetig differenzierbar, bijektiv und $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in [\alpha, \beta]$).

Dann gilt, falls τ orientierungserhaltend ist (d.h. $\tau'(s) > 0$ für alle $s \in [a, b]$):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \tau} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\tau(s))) \underbrace{\gamma'(\tau(s)) \tau'(s)}_{=(\gamma \circ \tau)'(s)} ds \\ &\stackrel{\substack{\text{Substitution} \\ t=\tau(s),}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

und, falls τ orientierungsumkehrend ist (d.h. $\tau'(s) < 0$ für alle $s \in [a, b]$):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \tau} f(z) dz &\stackrel{\substack{\text{Substitution} \\ t=\tau(s), \text{ wobei} \\ \tau(\alpha)=b, \tau(\beta)=a}}{=} \int_b^a f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= - \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} f(z) dz \end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften liefert:

Lemma 2.14 *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$, $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, $c \in (a, b)$ sowie $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz &= \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz, \\ \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz, \\ \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq L(\gamma) \sup_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|, \end{aligned}$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ bezeichnet.

Beweis: Die erste Aussage folgt direkt aus der Linearität des Integrals. Die zweite Aussage folgt aus dem 2. Übungsblatt, Aufgabe 3. Die letzte Aussage folgt aus:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(\gamma_j(t))| |\gamma_j'(t)| dt \leq \sup_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)| \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma_j'(t)| dt}_{=L(\gamma)}.$$

■

Im Folgenden sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

2.2.2 Der Cauchysche Integralsatz

Für das Folgende sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve.

Das erste zentrale Resultat der Funktionentheorie ist der Cauchysche Integralsatz für holomorphe Funktionen.

Satz 2.15 (Cauchyscher Integralsatz)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig bezüglich eines Zentrum $z_0 \in U$ (d.h. für alle $z \in U$ und $t \in [0, 1]$ ist $(1-t)z + tz_0 \in U$), dann gilt für jede geschlossene stückweise differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \tag{2.9}$$

Außerdem gilt für alle stetigen stückweise differenzierbaren Kurven $\gamma_j: [a_j, b_j] \rightarrow U$, $j = 1, 2$, mit $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, dass

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Für das Folgende definieren wir $u(x, y) = \operatorname{Re}f(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im}f(x + iy)$ sowie $f_{Re}, f_{Im}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f_{Re}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix} \quad f_{Im}(x, y) = \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$$

für alle $x + iy \in U$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f_{Re}(x, y) \cdot d(x, y) + i \int_{\gamma} f_{Im}(x, y) \cdot d(x, y),$$

siehe 2. Übungsblatt, 4. Aufgabe.

Beweis von Satz 2.15: Wir beweisen den Satz unter der zusätzlich Voraussetzung, dass $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Für den allgemeinen Fall verweisen wir auf das Buch von Jänich: "Funktionentheorie".

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned} \partial_x f_{Re,2}(x, y) &= -\partial_x v(x, y) = \partial_y u(x, y) = \partial_y f_{Re,1}(x, y) \\ \partial_x f_{Im,2}(x, y) &= \partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) = \partial_y f_{Im,1}(x, y) \end{aligned}$$

D.h. $f_{Re}, f_{Im}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfüllen die Integrabilitätsbedingung aus Satz 1.74 der Analysis II für Physiker und es gibt Potentiale $\varphi_{Re}, \varphi_{Im}: U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$f_{Re}(x, y) = \nabla \varphi_{Re}(x, y), \quad f_{Im}(x, y) = \nabla \varphi_{Im}(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in U.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} f_{Re}(x, y) \cdot d(x, y) + i \int_{\gamma} f_{Im}(x, y) \cdot d(x, y) \\ &= \varphi_{Re}(\gamma(b)) - \varphi_{Re}(\gamma(a)) + i\varphi_{Im}(\gamma(b)) - i\varphi_{Im}(\gamma(a)) = 0, \end{aligned}$$

da γ geschlossen ist. Ersetzt man γ durch γ_1 bzw. γ_2 erhält man die zweite Aussage. ■

Bemerkung 2.16 Man kann sogar eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes zeigen: Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, sodass (2.9) für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt, so ist f holomorph. Dies ist der Satz von Morera.

Definition 2.17 $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Stammfunktion von f , wenn F holomorph ist und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$ gilt.

Folgerung 2.18 1. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig (bezüglich eines Zentrum $z_0 \in U$), so hat f eine Stammfunktion F .

2. Ist F eine Stammfunktion von f und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis: Zu 1.: Es seien $\varphi_{Re}, \varphi_{Im}: U \rightarrow \mathbb{R}$ die Potentiale von f_{Re}, f_{Im} aus dem vorangehenden Beweis. Wir definieren $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(x + iy) = \varphi_{Re}(x, y) + i\varphi_{Im}(x, y) \quad \text{für alle } x + iy \in U.$$

Dann ist F reell differenzierbar, da $\varphi_{Re}, \varphi_{Im}$ differenzierbar sind. Außerdem sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, da

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi_{Re}(x, y) &= f_{Re,1}(x, y) = u(x, y) = f_{Im,2}(x, y) = \partial_y \varphi_{Im}(x, y), \\ \partial_y \varphi_{Re}(x, y) &= f_{Re,2}(x, y) = -v(x, y) = -f_{Im,1}(x, y) = -\partial_x \varphi_{Im}(x, y) \end{aligned}$$

für alle $x + iy \in U$. Somit ist F holomorph und $F'(x + iy) = \partial_x \varphi_{Re}(x, y) + i\partial_x \varphi_{Im}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy)$ für alle $x + iy \in U$.

Zu 2.: Ist F eine Stammfunktion von f und $\varphi_{Re}(x, y) = \operatorname{Re} F(x + iy)$, $\varphi_{Im}(x, y) = \operatorname{Im} F(x + iy)$ für alle $x + iy \in U$, so folgt umgekehrt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass $f_{Re} = \nabla \varphi_{Re}$, $f_{Im} = \nabla \varphi_{Im}$. Wie im Beweis von Satz 2.15, dass

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) &= \int_{\gamma} f_{Re}(x, y) \cdot d(x, y) + i \int_{\gamma} f_{Im}(x, y) \cdot d(x, y) \\ &= \varphi_{Re}(\gamma(b)) - \varphi_{Re}(\gamma(a)) + i\varphi_{Im}(\gamma(b)) - i\varphi_{Im}(\gamma(a)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

■

- Beispiele 2.19** 1. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f , da $F'(z) = z^n$. Die Funktionen $\exp, \cos, \sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ haben die Stammfunktionen \exp, \sin bzw. $-\cos$.
2. Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \neq 0$ und $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = re^{it}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und ein $r > 0$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i, \quad (2.10)$$

vgl. Beispiel 1.42. Insbesondere gilt die Aussage des Cauchy-Integralsatzes nicht. $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist auch nicht sternförmig.

Allerdings besitzt $f: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion, da $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sternförmig bzgl. 1 ist. Siehe auch den Abschnitt über komplexe Logarithmen unten.

3. Es sei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann ist $F: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F(z) = \frac{z^{1-n}}{1-n}$ für $z \neq 0$ eine Stammfunktion von f , was man leicht mit Hilfe der Quotientenregel (Lemma 2.2) verifiziert.

Für nicht sternförmige Gebiet gilt:

Satz 2.20 (Variante vom Cauchyschen Integralsatz)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand und äußeren Normalen ν , sodass $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$, wobei Γ_j , $j = 1, \dots, N$ disjunkt seien und die Bilder von regulären, geschlossenen, überschneidungsfreien Kurven $\gamma_j: I_j \rightarrow \partial\Omega$ sind, sodass

$$\det(\nu(\gamma_j(t)) | \gamma_j'(t)) > 0 \quad \text{für alle } t \in I_j, j = 1, \dots, N$$

(d.h. γ_j sind positiv orientiert bzgl. der äußeren Normalen ν .) Außerdem sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U \supseteq \overline{\Omega}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} f(z) dz = 0.$$

Beweis: Siehe 2. Übungsblatt, 4. Aufgabe.

Für das Folgende benötigen wir: Eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Jordankurve*, wenn sie stetig und überschneidungsfrei ist. Ohne Beweis nutzen wir:

Satz 2.21 (Jordanscher Kurvensatz)

Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Jordankurve und $\Gamma = \gamma([a, b])$. Dann gibt es genau zwei disjunkte, offene und zusammenhängende Mengen $I(\Gamma)$ und $A(\Gamma)$, sodass $\mathbb{C} \setminus \Gamma = I(\Gamma) \cup A(\Gamma)$ und $I(\Gamma)$ beschränkt ist. $A(\Gamma)$ ist unbeschränkt.

Hierbei heißt eine offene Menge U zusammenhängend, wenn es für alle $z_0, z_1 \in U$ eine stetige Kurve $\varphi: [0, 1] \rightarrow U$ gibt mit $\varphi(0) = z_0$ und $\varphi(1) = z_1$.

Notation: Im Folgenden nennen wir $I(\gamma)$ *Inneres* und $A(\gamma)$ *Äußeres* von γ . Ist γ stetig differenzierbar und regulär, so heißt γ *positiv orientiert*, wenn γ positiv orientiert bezüglich $I(\gamma)$ ist, vgl. Definition 1.39. Diese Definition lässt sich auf geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Jordan-Kurven γ ausweiten. In diesem Fall gelte

$$\det(\nu(\gamma(t)) | \gamma'(t)) > 0$$

für alle $t \in [a, b]$, in denen γ differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq 0$ gilt. (In solchen Punkten existiert auch $\nu(\gamma(t))$.)

Beispiel 2.22 Im Folgenden sei $\gamma_{r,z_0}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma_{r,z_0}(t) = r(z_0 + e^{it})$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, wobei $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist γ_{r,z_0} eine geschlossene Jordan-Kurve und

$$\begin{aligned} \Gamma_{r,z_0} &:= \gamma_{r,z_0}([0, 2\pi]) = \partial B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}, \\ I(\gamma_{r,z_0}) &= B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, \\ A(\gamma_{r,z_0}) &= \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}. \end{aligned}$$

γ_{r,z_0} ist positiv orientiert. Im Folgenden bezeichnen wir

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz := \int_{\gamma_{r,z_0}} f(z) dz$$

für jedes stetige $f: \Gamma_{r,z_0} \rightarrow \mathbb{C}$.

Folgerung 2.23 (Deformationsatz)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Außerdem sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare und positiv orientierte Jordan-Kurve, sodass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq I(\gamma) \subseteq U$ für ein $r > 0$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz. \quad (2.11)$$

Beweis: O.B.d.A. sei γ stetig differenzierbar und reguläre. (Der allgemeine Fall kann per Approximation mit solchen Kurven gezeigt werden.) Es sei $\Omega = I(\gamma) \setminus \overline{B_r(z_0)}$. Dann gilt $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_{r,z_0}$, wobei $\Gamma = \gamma([a, b])$ und $\gamma_{r,z_0}, \Gamma_{r,z_0}$ wie in Beispiel 2.22. Dann ist γ_{r,z_0} positiv orientiert bezüglich B_{r,z_0} , aber *negativ orientiert* bezüglich Ω , d.h. $\gamma_{r,z_0} \circ \tau$ ist positiv orientiert bezüglich Ω , wobei $\tau(t) = 2\pi - t$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Damit folgt aus Satz 2.20:

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma_{r,z_0} \circ \tau} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma_{r,z_0}} f(z) dz,$$

da τ eine orientierungsumkehrende Umparametrisierung ist. Daraus folgt die Behauptung. ■

Damit erhalten wir das nächste zentrale Resultat:

Satz 2.24 (Cauchysche Integralformel)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare und positiv orientierte Jordan-Kurve mit $I(\gamma) \subseteq U$ und $z_0 \in I(\gamma)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0). \quad (2.12)$$

für jede holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Beweis: Es sei $g: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Dann folgt aus Folgerung 2.23 für g statt f :

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

für alle $r > 0$ so klein, dass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq I(\gamma)$. Da f stetig in z_0 ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$ falls $|z - z_0| \leq \delta$. Daraus folgt

$$\left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma_{z_0,r}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} L(\gamma_{z_0,r}) \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} 2\pi r = \varepsilon$$

für alle $r \in (0, \delta]$. Dabei gilt

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

wegen (2.10). Daraus folgt

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

und somit die Behauptung. ■

Beispiel:

1. Es gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i$$

wegen Satz 2.24, da $0 \in I(\Gamma_{1,0})$ und $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

2. Es gilt

$$\int_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z} dz = 0$$

wegen Satz 2.15 und da $f: U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \frac{\cos z}{z}$ holomorph ist und $I(\gamma_{1,2}) \cup \Gamma_{1,2} = \overline{B_1(2)} \subseteq U$ gilt.

Ausblick: Einfachzusammenhängende Gebiete

Ein Gebiet, d.h. eine offene und zusammenhängende Menge, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn:

Sich jede stetige geschlossene Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ stetig auf einen Punkt (in Ω) zusammenziehen lässt.

Formal bedeutet dies: Es gibt eine stetige Abbildung $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, sodass

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma(t) && \text{für alle } t \in [a, b], \\ H(a, s) &= H(b, s) && \text{für alle } s \in [0, 1], \\ H(t, 1) &\text{ ist konstant} && \text{für } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet einfach zusammenhängend, dass Ω "keine Löcher" besitzt.

Beispiel 2.25 Jedes sternförmige Gebiet Ω bezüglich eines Zentrums z_0 ist einfach zusammenhängend, da $H(t, s) := (1 - s)\gamma(t) + sz_0$, $t \in [a, b]$, $s \in [0, 1]$, die obigen Bedingungen erfüllt. Insbesondere ist jede Kugel, \mathbb{C} und allgemeiner jede konvexe Menge \mathbb{C} einfach zusammenhängend. $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, da sich z.B. die Kurven γ_{r,z_0} aus Beispiel 2.22 nicht zu einem Punkt innerhalb von $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ zusammenziehen lassen.

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gilt $I(\gamma) \subseteq \Omega$ für jede geschlossene Jordan-Kurve γ . Insbesondere gilt die Cauchysche Integralformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

für jede geschlossene, stückweise stetig differenzierbare und positiv orientierte Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, wenn $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Außerdem lassen sich Satz 2.15 und Folgerung 2.18.1 allgemeiner für jedes einfach zusammenhängende Gebiet $U = \Omega$ zeigen.

2.3 Umkehrfunktionen und die komplexen Logarithmen

2.3.1 Biholomorphe Abbildungen

Definition 2.26 Seien $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann heißt $f: D \rightarrow D'$ biholomorph, falls f bijektiv und $f: D \rightarrow D', f^{-1}: D' \rightarrow D$ holomorph sind. $f: D \rightarrow D'$ heißt lokal biholomorph bei $z_0 \in D$, falls f nicht konstant ist und es ein $\varepsilon > 0$ gibt so dass $f: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow f(B_\varepsilon(z_0))$ biholomorph ist.

Lemma 2.27 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f genau dann lokal biholomorph in $z_0 \in U$, falls $f'(z_0) \neq 0$.

Beweis: “ \implies ”: Es f lokal biholomorph bei z_0 und $\varepsilon > 0$, sodass $f: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow f(B_\varepsilon(z_0))$ biholomorph ist. Dann folgt aus der Kettenregel:

$$1 = z' = (f^{-1}(f(z)))' = (f^{-1})'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad \text{für alle } z \in B_\varepsilon(z_0)$$

Somit gilt $f'(z_0) \neq 0$.

“ \impliedby ”: Ist $f'(z_0) = a + ic \neq 0$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} \partial_x u(x_0, y_0) & \partial_y u(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) & \partial_y v(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = a^2 + c^2 = |f'(z_0)| \neq 0$$

nach Satz 2.9, wobei $f(x_0 + iy_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$. Aus dem Satz über die Umkehrfunktion (Analysis II) folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow f(B_\varepsilon(z_0))$ bijektiv ist und $f^{-1}: f(B_\varepsilon(z_0)) \rightarrow B_\varepsilon(z_0)$ reell differenzierbar ist. Außerdem gilt

$$Df^{-1}(f(z)) = (Df(z))^{-1} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + c^2} \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für alle } z \in B_\varepsilon(z_0)$$

wobei $a = \partial_x u(x, y), c = \partial_x v(x, y)$. Aus Satz 2.9 folgt, dass $f^{-1}: f(B_\varepsilon(z_0)) \rightarrow B_\varepsilon(z_0)$ holomorph ist. ■

Beispiel 2.28 1. Sei $f: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist f bijektiv und $f^{-1} = f$ ist holomorph $\implies f$ ist biholomorph. Außerdem gilt für $D^\times := B_1(0) \setminus \{0\}$

$$f(D^\times) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} = \overline{B_1(0)}^c$$

da $|f(z)| = \frac{1}{|z|} > 1$ für alle $z \in D^\times$ und für $w \in \overline{B_1(0)}^c, \frac{1}{w} \in D^\times$ ein Urbild von w ist.

2. Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp'(z) = \exp(z) = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{\cos(y) + i \sin(y)}_{|\cdot|=1} \neq 0$$

Somit ist $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ lokal biholomorph, aber nicht injektiv, da

$$\exp(z + 2\pi ki) = e^z e^{2\pi ki} = e^z \underbrace{(\cos(2\pi k))}_{=1} + i \underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0} = e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ und nicht surjektiv, da $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Behauptung: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp: S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi)\} \rightarrow C_\alpha$$

mit $C_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -re^{i\alpha} \text{ für alle } r \geq 0\}$ bijektiv.

Beweis: Für $z = x + iy \in S_\alpha$ gilt

$$\exp(z) = \underbrace{e^x}_{>0} e^{iy}$$

wobei $e^{iy} \neq -e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\pi)}$, da $y \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$ und $e^{i\varphi} = e^{i\psi} \implies \varphi = \psi + 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ (siehe Analysis I). Daraus folgt $\exp(S_\alpha) \subseteq C_\alpha$.

$\exp: S_\alpha \rightarrow C_\alpha$ ist injektiv, weil: Aus $\exp(x_1 + iy_1) = \exp(x_2 + iy_2)$ folgt $\exp(x_1) = |\exp(x_1 + iy_1)| = |\exp(x_2 + iy_2)| = \exp(x_2)$ und somit $x_1 = x_2$, da $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv ist. Daraus folgt wiederum $\exp(iy_1) = \exp(iy_2)$ sowie $y_1 = y_2$, da $y_1, y_2 \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$.

Andererseits hat jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine eindeutige Darstellung $w = re^{i\varphi}$ mit $r = |w|$ und $\varphi \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi]$. Ist nun $w \in C_\alpha$, so muss $\varphi \in (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$ gelten und $z = \ln r + i\varphi$ ist ein Urbild von w , da

$$\exp z = e^{\ln r} e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = w$$

Somit ist $\exp: S_\alpha \rightarrow C_\alpha$ bijektiv und die Behauptung ist gezeigt.

Insbesondere ist $\log_\alpha: C_\alpha \rightarrow S_\alpha$ mit

$$\log_\alpha(w) = \ln r + i\varphi \quad \text{für alle } w = re^{i\varphi} \in C_\alpha \tag{2.13}$$

nach Lemma 2.27 holomorph (und somit auch biholomorph) \log_α wird (komplexer) Logarithmus (auf S_α) genannt.

Da \exp bei allen $z \in \mathbb{C}$ lokal biholomorph ist, ist $\log_\alpha(w)$ für alle $w \in C_\alpha$ komplex differenzierbar und es gilt:

$$1 = w' = \exp(\log_\alpha(x))' = \underbrace{\exp(\log_\alpha(w))}_{=w} \log_\alpha' w$$

Daraus folgt

$$\log'_\alpha w = \frac{1}{w} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{C}_\alpha. \quad (2.14)$$

Außerdem gilt für alle $w_1, w_2 \in C_\alpha$ mit $w_1 \cdot w_2 \in C_\alpha$ und $\log_\alpha(w_1), \log_\alpha(w_2) \in S_\alpha$:

$$\log_\alpha(w_1 \cdot w_2) = \log_\alpha w_1 + \log_\alpha w_2 \quad (2.15)$$

da

$$\begin{aligned} \exp(\log_\alpha w_1 + \log_\alpha w_2) &= \exp(\log_\alpha w_1) \cdot \exp(\log_\alpha w_2) \\ &= w_1 \cdot w_2 \stackrel{w_1 \cdot w_2 \in C_\alpha}{=} \exp(\log_\alpha(w_1 \cdot w_2)) \end{aligned}$$

und $\exp: S_\alpha \rightarrow C_\alpha$ bijektiv ist.

Für $\alpha = 0$ erhalten wir den sogenannten *Hauptzweig* (oder Hauptwert) $\text{Log} = \log_0$ der komplexen Logarithmen. Insbesondere ist

$$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}z < \pi\}$$

biholomorph und wegen (2.13) gilt

$$\text{Log } x = \ln x \quad \text{für alle } x \in (0, \infty)$$

das heißt Log setzt den reellen Logarithmus $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nach $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ fort.

Bemerkung 2.29 $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow S_0$ lässt sich nicht stetig auf $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortsetzen, denn für alle $x \in (-\infty, 0)$ gilt:

$$x = -|x| = |x| \lim_{t \rightarrow \pi^-} e^{\pm it}$$

aber

$$\text{Log}(|x| e^{\pm it}) \stackrel{(2.13)}{=} \ln|x| \pm it \xrightarrow{t \rightarrow \pi^-} \ln|x| \pm i\pi$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow \pi^-} \text{Log}(|x| e^{it}) = \ln|x| + i\pi \neq \ln|x| - i\pi = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \text{Log}(|x| e^{-it})$$

Das heißt Log "springt" entlängs des "Schlitzes" $(-\infty, 0]$ von $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ um $2\pi i$.

Bemerkung: Log ist eine Stammfunktion von $t \mapsto \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wie wir bereits gesehen haben hat $z \mapsto \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, da

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Dies hängt direkt mit dem obigen Sprung von Log entlängs von $(-\infty, 0]$ zusammen.

Anwendung: Umlaufzahl

Definition 2.30 Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\nu_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz \quad (2.16)$$

Umlaufzahl von γ um den Punkt z_0 .

Geometrische Interpretation: O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Außerdem sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass $\gamma_j = \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ nur Werte in einer Halbebene

$$H_{\theta_j} := \{re^{i\varphi} : \varphi \in (\theta_j, \theta_j + \pi), r > 0\}$$

für ein $\theta_j \in [0, 2\pi)$ annimmt, für alle $j = 0, \dots, N-1$. Dies ist möglich, da $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig ist.

Da \log_{θ_j} eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf H_{θ_j} ist, gilt

$$\int_{\gamma_j} \frac{1}{z} dz = \log_{\theta_j}(\gamma(t_{j+1})) - \log_{\theta_j}(\gamma(t_j)) \stackrel{(2.13)}{=} \ln \frac{|\gamma(t_{j+1})|}{|\gamma(t_j)|} + i \overbrace{(\varphi_j(t_{j+1}) - \varphi_j(t_j))}^{\substack{\text{Winkel zwischen } \gamma(t_j) \\ \text{und } \gamma(t_{j+1})}}$$

wobei

$$\gamma(t_{j+1}) = |\gamma(t_{j+1})| e^{i\varphi_j(t_{j+1})}, \quad \gamma(t_j) = |\gamma(t_j)| e^{i\varphi_j(t_j)}$$

und

$$\varphi_j(t_j), \varphi_j(t_{j+1}) \in (-\pi + \theta_j, \pi + \theta_j)$$

und $j = 0, \dots, N-2$.

Da $\gamma(t_{j+1}) = |\gamma(t_{j+1})| e^{i\varphi_j(t_{j+1})} = |\gamma(t_{j+1})| e^{i\varphi_{j+1}(t_{j+1})}$ folgt $\varphi_j(t_{j+1}) = \varphi_{j+1}(t_{j+1}) + 2\pi k_j$ für ein $k_j \in \mathbb{Z}, j = 0, \dots, N-1$ (Eindeutigkeit der Polardarstellung modulo $2\pi\mathbb{Z}$ im Winkel).

Analog folgt $\varphi_{N-1}(t_N) = \varphi_0(t_0) + 2\pi k_N$ für ein $k_N \in \mathbb{Z}$, da $\gamma(t_N) = \gamma(t_0)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{1}{z} dz &= \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} (\ln |\gamma(t_{j+1})| - \ln |\gamma(t_0)|)}_{=\ln |\gamma(t_N)| - \ln |\gamma(t_0)| = 0} + i \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} (\varphi_j(t_{j+1}) - \varphi_j(t_j))}_{\substack{\text{Summe der Winkel zwischen} \\ \gamma(t_j) \text{ und } \gamma(t_{j+1})}} \\ &= i \sum_{j=0}^{N-1} (\varphi_{j+1}(t_{j+1}) - \varphi_j(t_j) + 2\pi k_j) \\ &= 2\pi i \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} k_j}_{\in \mathbb{Z}}, \text{ wobei } \varphi_N(t_N) := \varphi_0(t_0). \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$\nu_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz \in \mathbb{Z}$$

Anschaulich beschreibt $\nu_\gamma(z_0)$ wie häufig γ um den Punkt z_0 herumläuft, wobei ein Umlauf gegen/im Uhrzeigersinn positiv/negativ gerechnet wird.

Beispiel 2.31

1. Sei $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 1 \quad (\text{siehe Übungen})$$

2. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei $\gamma_m: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit $\gamma_m(t) = \gamma(mt) = z_0 + re^{imt}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{1}{z - z_0} dz = m \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = m$$

(Details: Übung, vgl. 2. Übungsblatt)

Komplexe Potenzen und Wurzeln

Es seien $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], b \in \mathbb{C}$. Dann definiert man

$$a^b := \exp(b \cdot \text{Log}(a)) \tag{2.17}$$

wobei $\text{Log}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z \in (-\pi, \pi)\}$ den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Dann stimmt a^b für $a > 0, b \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Definition von $a^b = \exp(b \ln a)$ aus Analysis I überein, da $\text{Log}(a) = \ln a$ für $a > 0$.

Dann gilt für alle $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], b, c \in \mathbb{C}$:

$$a^b \cdot a^c = \exp((b + c) \text{Log}(a)) = a^{b+c} \tag{2.18}$$

sowie, falls $b \text{Log} a \in S_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z \in (-\pi, \pi)\}$:

$$(a^b)^c = \exp(c \text{Log}(a^b)) = \exp(c \underbrace{\text{Log}(\exp(b \text{Log} a))}_{=b \text{Log} a, \text{ da } b \text{Log} a \in S_0}) = \exp(cb \text{Log} a) = a^{bc} \tag{2.19}$$

Die letzte Bedingung ist z.B. erfüllt, falls $c \in [1, \infty)$ und $b = \frac{1}{c} \in (0, 1)$. Daraus folgt

$$(a^{\frac{1}{c}})^c = a^{\frac{1}{c} \cdot c} = a \quad \text{für alle } c \geq 1, a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \tag{2.20}$$

Insbesondere ist für $c = n \in \mathbb{N}$ $z := a^{\frac{1}{n}}$ eine Lösung von $z^n = a$. (Dies sind natürlich nicht alle, siehe Analysis I.)

Für $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \text{Log} a\right)$$

Damit ist $\sqrt[n]{\cdot}: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \Sigma_n$ biholomorph, wobei $\Sigma_n = \{re^{i\varphi} \mid \varphi \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}), r > 0\}$. Alle Lösungen von $z^n = a$ erhält man als

$$z_k = \sqrt[n]{a} e^{i2\pi \frac{k}{n}} \quad \text{für } k = 0, \dots, n - 1$$

Hierbei werden $e^{i2\pi \frac{k}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$, als *Einheitswurzeln bezeichnet*, da dies alle Lösungen von $z^n = 1$ in \mathbb{C} sind.

2.4 Potenzreihenentwicklungen holomorpher Funktionen

Der folgende Satz liefert eine ‘Umkehrung’ von Satz 2.4.

Satz 2.32 (Potenzreihenentwicklungssatz)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$ so dass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$. Dann gibt es genau eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (mit Entwicklungspunkt z_0), sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0) \quad (2.21)$$

Außerdem ist f beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.22)$$

Bemerkung 2.33 (2.22) zeigt, dass a_n nicht von $r > 0$, aber im Allgemeinen von z_0 abhängen.

Beweisskizze für Satz 2.32: Eindeutigkeit/Differenzierbarkeit: Aus (2.21) und Satz 2.4 folgt, dass f beliebig oft komplex differenzierbar ist und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z - z_0)^{n-k} \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0)$$

Daraus folgt $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit sind die Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eindeutig durch f bestimmt und es gilt die erste Gleichung in (2.22).

Existenz: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$ (Sonst betrachte $\tilde{f}(z) = f(z + z_0)$). Dann folgt aus (2.12) für $z \in B_r(0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} dw$$

Da $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{r} < 1$, folgt

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n \quad (\text{geometrische Reihe})$$

wobei die Reihe gleichmäßig bezüglich $w \in \partial B_r(0)$ konvergiert. Damit erhält man

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw\right)}_{=a_n} z^n.$$

Somit gelten (2.21) und (2.22), da $z_0 = 0$. □

Beispiel 2.34 $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ist holomorph. Für jedes $z_0 \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-z_0}{z_0}\right)} \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{z_0^{n+1}}}_{=a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0) \end{aligned}$$

wobei $r = |z_0|$. Dabei gilt $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1$ für alle $z \in B_r(z_0)$ und somit konvergiert die obige geometrische Reihe.

Bemerkung: Der Radius $r = |z_0|$ ist der maximale Radius, sodass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für alle $z \in B_r(z_0)$ gelten kann, weil: Falls dies für ein $r > |z_0|$ gilt, ist $0 \in B_r(z_0)$ und $|f(z)| = \frac{1}{|z|} \rightarrow_{z \rightarrow 0} +\infty$. Andererseits ist der Wert der Reihe innerhalb des Konvergenzradius immer endlich.

Satz 2.32 hat viele Folgerungen:

Satz 2.35 (Satz von Goursat)

Jede holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ist in jedem $z \in U$ beliebig oft komplex differenzierbar.

Beweis: Folgt direkt daraus, dass jede Potenzreihe innerhalb von $B_R(z_0)$ beliebig oft differenzierbar ist, wenn R der Konvergenzradius ist. ■

Satz 2.36 (Satz von Liouville)

Ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Für den Beweis benötigen wir:

Satz 2.37 (Cauchy-Abschätzung für Taylorkoeffizienten)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $r > 0$, sodass $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$, und es gelte (2.21) sowie $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \partial B_r(z_0)$ und ein $M > 0$. Dann folgt

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{2.23}$$

Beweis: Aus (2.22) folgt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \underbrace{\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}_{\leq \frac{M}{r^{n+1}}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \underbrace{L(\partial B_r(z_0))}_{=2\pi r} = \frac{M}{r^n}$$

■

Beweis von Satz 2.36: Ist f beschränkt, so gibt es ein $M > 0$, sodass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus (2.23) folgt somit

$$|a_n| \leq \underbrace{\frac{M}{r^n}}_{\rightarrow_{r \rightarrow \infty} 0, \text{ falls } n \geq 1} \quad \text{für alle } r > 0.$$

Daraus folgt $|a_n| = 0$ für alle $n \geq 1$ bzw. $f(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. ■

Satz 2.38 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom, das nicht konstant ist, hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Beweis: Per Widerspruch.

Annahme:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ hat keine Nullstelle in \mathbb{C} .

Wegen $f(z) = z^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right)$ gilt $|f(z)| \rightarrow_{|z| \rightarrow \infty} \infty$, da

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2}$$

für $|z| \geq R$, sofern $R > 0$ groß genug ist. Somit gibt es $M, r > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq M && \text{für alle } |z| \geq r. \\ \implies \left| \frac{1}{f(z)} \right| &\leq \frac{1}{M} && \text{für alle } |z| \geq r. \end{aligned}$$

Somit ist $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Wegen Satz 2.36 ist somit g bzw. f konstant, was ein Widerspruch zur Annahme des Satzes ist. ■

2.5 Isolierte Singularitäten

2.5.1 Die drei Typen isolierter Singularitäten

Definition 2.39 (Isolierte Singularität)

1. Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$. Dann heißt $x \in A$ isolierter Punkt von A , falls es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt so, dass $B_{\varepsilon_0}(x) \cap A = \{x\}$.
2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ isolierte Singularität von f falls z_0 ein isolierter Punkt von $\mathbb{C} \setminus U$ ist.

Beispiel 2.40

Seien $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $U' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$. Dann ist 0 eine isolierte Singularität von f , aber nicht von $\text{Log}: U' \rightarrow \mathbb{C}$.

Definition 2.41 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und z_0 eine isolierte Singularität von $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt z_0 :

1. hebbar, falls es ein $w_0 \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\tilde{f}: U \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für alle } z \in U \\ w_0 & \text{falls } z = z_0 \end{cases}$$

holomorph ist.

2. Pol, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$$

eine hebbare Singularität bei z_0 hat. Das kleinste derartige $m \in \mathbb{N}$ heißt Ordnung des Pols.

3. wesentliche Singularität von f , falls z_0 kein Pol und nicht hebbar ist.

Beispiel 2.42

1. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $f(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$ für alle $z \neq 1$. Dann ist $z_0 = 1$ eine hebbare isolierte Singularität von f , da $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(z) = z + 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph ist und $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \neq 1$. (Wähle $w_0 = 1$ und z_0 in der vorangehenden Definition.)
2. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = z^{-m}$ für alle $z \neq 0$, wobei $m \in \mathbb{N}^\times$. Dann ist die isolierte Singularität $z_0 = 0$ nicht hebbar, da

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{|z|^m} = +\infty.$$

Aber 0 ist ein Pol der Ordnung m , da $z^m f(z) = 1$ für alle $z \neq 0$ offensichtlich eine hebbare isolierte Singularität bei 0 hat und $z \mapsto z^k f(z) = z^{k-m}$ für alle $k = 1, \dots, m-1$ keine hebbare Singularität bei 0 hat. (Ersetze m durch $m-k$ oben.)

3. Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = \cos \frac{1}{z}$. Dann ist 0 eine wesentliche Singularität von f , da für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \left(i \frac{1}{n+1} \right)^m f \left(i \frac{1}{n+1} \right) \right| = \underbrace{\frac{e^{n+1} + e^{-(n+1)}}{2}}_{\cosh(n+1)} \left(\frac{1}{n+1} \right)^m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^m}{e^n} = 0$ (siehe Analysis I).

Somit ist 0 für kein $m \in \mathbb{N}_0$ eine hebbare Singularität von $z \mapsto z^m f(z)$.

2.5.2 Laurentreihen

Definition 2.43 Es seien $c_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad (2.24)$$

Laurentreihe um z_0 , wobei $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ Haupt- und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ Nebenteil der Laurentreihe heißt. Die Laurentreihe konvergiert, falls Haupt- und Nebenteil konvergieren. Der Wert der Reihe wird durch (2.24) definiert.

Bemerkung 2.44 Der Hauptteil ist eine Potenzreihe in $w = \frac{1}{z-z_0}$.

Lemma 2.45 Seien $c_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ und $r := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$. Dann konvergiert

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n =: f(z)$$

für alle $z \in D_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$ und $f: D_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph.

Beweis: Sei

$$\tilde{r} := \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{falls } r \in (0, \infty), \\ 0, & \text{falls } r = \infty, \\ \infty, & \text{falls } r = 0. \end{cases}$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$ für alle $|w| < \tilde{r}$ nach Satz 2.4 und somit $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n$ falls $|z-z_0| > r$. Insgesamt konvergieren beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $r < |z-z_0| < R$. ■

Bemerkung 2.46 Mit Hilfe von Satz 2.4 kann man leicht zeigen:

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1} \quad \text{für alle } r < |z-z_0| < R \quad (2.25)$$

Ist nun $c_{-1} = 0$, so hat

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{für alle } r < |z-z_0| < R$$

die Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} \quad (2.26)$$

wobei $r < |z-z_0| < R$ und “ $n \neq -1$ ” bedeutet, dass der Koeffizient für $n = -1$ als Null definiert wird. Dies folgt aus (2.25) angewendet auf F statt f .

Bemerkung 2.47 Die Konvergenzradien r und R ändern sich nicht, wenn c_n durch nc_n bzw. $\frac{c_n}{n+1}$ ersetzt werden, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$.

Beispiel 2.48 Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 sei ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f . Dann gibt es ein $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, sodass $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$. Ist $R > 0$, sodass $B_R(z_0) \subseteq U$ und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in B_R(z_0)$$

die Potenzreihenentwicklung von g , so folgt

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n$$

für alle $0 < |z - z_0| < R$. Dies ist eine Laurentreihe mit Koeffizienten

$$c_n = \begin{cases} d_{n+m}, & \text{falls } n \geq -m, \\ 0 & \text{falls } n < -m. \end{cases}$$

Satz 2.49 (Laurentreihenentwicklungssatz)

Seien $0 \leq r < R \leq \infty, z_0 \in \mathbb{C}, D_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ und $f: D_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in D_{r,R}(z_0), \tag{2.27}$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z} \tag{2.28}$$

für beliebiges $\varrho \in (r, R)$.

Beweis: Es seien $z \in D_{r,R}(z_0), \delta > 0$ so dass $r + \delta < |z - z_0| < R - \delta$.

Behauptung:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=R-\delta} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r+\delta} \frac{f(w)}{z - w} dw \tag{2.29}$$

Beweis: Es sei $g: D_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{falls } w \in D_{r,R}(z_0) \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{falls } w = z \end{cases}$$

Aus dem Potenzreihenentwicklungssatz folgt, dass g holomorph ist. (Details: Übung) Aus Folgerung 2.23 folgt

$$\int_{|w-z_0|=R-\delta} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dw = \int_{|w-z_0|=r+\delta} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dw$$

Außerdem gilt für alle $\varrho \in (r, R)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{z-w} dw \\ &= -f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\varrho} \frac{1}{w-z} dw}_{\begin{cases} = 1 & \text{nach Satz 2.24 falls } \varrho > |z-z_0| \\ = 0 & \text{nach Satz 2.15, falls } \varrho < |z-z_0| \end{cases}} = \begin{cases} -f(z) & \text{falls } \varrho > |z-z_0| \\ 0 & \text{falls } \varrho < |z-z_0| \end{cases} \end{aligned}$$

Setzt man alles zusammen, erhält man die Behauptung.

Nun gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \stackrel{\text{Geom. Reihe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w-z_0} \underbrace{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n}_{= \frac{1}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n}$$

falls $|w-z_0| = R-\delta > |z-z_0|$ und

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-z_0} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \stackrel{(n \rightarrow n+1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(w-z_0)^{-n+1}} (z-z_0)^{-n}$$

falls $|w-z_0| = r+\delta < |z-z_0|$. Setzt man dies in (2.29) ein, erhält man

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=R-\delta} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw}_{=: c_n} (z-z_0)^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r+\delta} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw}_{=: c_{-n}} (z-z_0)^{-n} \end{aligned}$$

dabei rechtfertigt man Vertauschung Reihenbildung und Integration indem man gleichmäßige Konvergenz der Reihen zeigt.

Schließlich folgt aus Folgerung 2.23, dass

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\varrho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad \text{für alle } \varrho \in (r, R) \text{ und alle } n \in \mathbb{Z}$$

da $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ holomorph auf $D_{r,R}(z_0)$ ist. ■

Beispiel 2.50 Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$. Dann folgt aus Differentiation von

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für alle } |z| < 1,$$

dass

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad \text{für alle } |z| < 1.$$

Für $|z| > 1$ erhält man die Laurentreihe

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} (-n+1) z^{-n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{0}_{\text{Nebenteil}}$$

wobei $c_{-n} = -(n-1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} \frac{z^{n+1}}{(1-z)^2} dz$ für $n \geq 2, \varrho > 1$.

Analog zu Satz 2.37 bei Potenzreihen gilt:

Satz 2.51 (Cauchy-Abschätzung für Laurentreihenkoeffizienten)

Seien f, c_n wie in Satz 2.49. Ferner gelte $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = \varrho$, wobei $\varrho \in (r, R)$. Dann gilt

$$|c_n| \leq \frac{M}{\varrho^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.30}$$

Beweis: Genauso wie der Beweis von Satz 2.37. ■

2.5.3 Anwendungen auf isolierte Singularitäten

Ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ eine isolierte Singularität von f , so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D_{0,\varepsilon}(z_0) \subseteq U$ und f lässt sich auf $D_{0,\varepsilon}(z_0) = B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ in eine Laurentreihe entwickeln.

Am Hauptteil $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ lässt sich der Typ der Singularitäten ablesen:

1. z_0 ist genau dann hebbar, wenn $c_{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Ist dies der Fall definiere $\tilde{f}(z_0) = c_0$ bzw. $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Umgekehrt ist \tilde{f} bzw. f in eine Potenzreihe entwickelbar, falls z_0 hebbar ist. Dies ist eine Laurentreihe mit verschwindendem Hauptteil.)
2. z_0 ist genau dann ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn $c_{-m} \neq 0$ und $c_{-n} = 0$ für alle $n > m$, siehe 5. Übungsblatt, 3. Aufgabe. In diesem Fall gilt für den Hauptteil

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^m c_{-n}(z - z_0)^{-n} \tag{2.31}$$

3. z_0 ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn es unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $c_{-m} \neq 0$. (Wäre z_0 hebbbar oder ein Pol, so wäre der Hauptteil von der Gestalt (2.31).)

Ein nützliches Kriterium ist:

Satz 2.52 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen) holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f . Ist f beschränkt in einer Umgebung von z_0 , das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$ und $M > 0$ so, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in D_{0,\varepsilon}(z_0) \subseteq U$, dann ist z_0 eine hebbare Singularität.

Bemerkung 2.53 Die analoge Aussage ist für stetig differenzierbare Funktion auf \mathbb{R} falsch! So ist z.B. $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$ nicht stetig in 0 fortsetzbar, aber beschränkt. $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \sin \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ ist auch in keiner Umgebung von 0 beschränkt. Deswegen ist der Riemannsche Hebbbarkeitssatz nicht anwendbar.

Beweis von Satz 2.52: Aus $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in D_{0,\varepsilon}(z_0)$ und (2.30) folgt

$$|c_n| \leq \underbrace{\frac{M}{\varrho^n}}_{\xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} 0, \text{ falls } n < 0} \quad \text{für alle } 0 < \varrho < \varepsilon$$

Daraus folgt $c_n = 0$ für alle $n < 0$. Somit ist z_0 eine hebbare Singularität wegen der vorangehenden Bemerkung. ■

Bemerkung: Ist z_0 ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f , so gilt $f(z) = (z - z_0)^{-m}g(z)$, wobei $g(z_0) \neq 0$, siehe Beispiel 2.42. Daraus folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = +\infty.$$

Dies gilt für wesentliche Singularität jedoch nicht. In der Nähe einer wesentlichen Singularität hat jedoch eine holomorphe Funktion eine Art "stark oszillierendes Verhalten". Dies zeigt:

Satz 2.54 (Großer Satz von Picard)

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine wesentliche Singularität von f . Dann gibt es ein $w_0 \in \mathbb{C}$, sodass $f(D_{0,\varepsilon}(z_0)) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ für alle $\varepsilon > 0$ klein genug.

Einen Beweis findet man z.B. im Buch von Remmert: "Funktionentheorie I".

Bemerkung: $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$ hat eine wesentliche Singularität bei 0.

2.5.4 Residuensatz

Definition 2.55 Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und z_0 eine isolierte Singularität von f sowie $\varepsilon > 0$ so, dass $D_{0,\varepsilon}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq U$ und $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ die Laurentreihe von f auf $D_{0,\varepsilon}(z_0)$. Dann heißt $\text{Res}_{z_0} f := c_{-1}$ das Residuum von f an der Stelle z_0

Bemerkung 2.56 Aus (2.28) folgt $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} f(z) dz$ für alle $\varrho \in (0, \varepsilon)$.

Die Bedeutung des Residuums folgt aus:

Satz 2.57 (Residuensatz)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit Zentrum \tilde{z}_0 , $S \subseteq \Omega$ so, dass jedes $z_0 \in S$ isoliert ist und $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt für jede geschlossene stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \setminus S$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_0 \in S} \nu_{\gamma}(z_0) \text{Res}_{z_0}(f) \tag{2.32}$$

Bemerkung 2.58 1. Man kann zeigen, dass S abzählbar unendlich oder S endlich ist und für alle $R > 0$ $S \cap \overline{B_R(z_0)}$ endlich ist. Dabei geht wesentlich ein, dass jedes $z_0 \in S$ isoliert und $\overline{B_R(z_0)}$ kompakt ist. Somit ist die Reihe in (2.32) eigentlich eine endliche Summe

$$\sum_{z_0 \in S \cap \overline{B_R(\tilde{z}_0)}} \nu_{\gamma}(z_0) \text{Res}_{z_0}(f)$$

und wohldefiniert, da $\nu_{\gamma}(z_0) = 0$, falls $z_0 \notin \overline{B_R(\tilde{z}_0)}$.

2. Der Satz gilt genauso für einfachzusammenhängende Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Dazu verwendet man im folgenden Beweis, dass Satz 2.24 auch für solche Gebiete gilt, siehe Abschnitt über einfachzusammenhängende Gebiete.

Beweis: Sei $R > 0$, sodass $\gamma([a, b]) \subseteq \overline{B_R(z_0)}$. Wegen Bemerkung 2.58.1 gilt $S \cap B_R(\tilde{z}_0) = \{z_0, \dots, z_N\}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$. Dabei gelte o.B.d.A. $S \cap B_R(\tilde{z}_0) \neq \emptyset$, da Aussage sonst aus Satz 2.15 folgt. Zu $z_j, j \in \{0, \dots, N\}$ sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^j(z - z_j)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f in einem $D_{0,\varepsilon_j}(z_j) \subseteq \Omega \setminus S$ und

$$h_j(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^j(z - z_j)^{-n} \quad \text{für alle } z \neq z_j$$

der Hauptteil. Dabei konvergiert der Hauptteil für alle $z \neq z_j$, da $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^j w^n$ für alle $|w| > \frac{1}{\varepsilon_j}$ konvergiert und somit $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}^j|} = 0$ gelten muss, siehe z.B. Satz 12.7 Vorlesung

“Analysis I” von Prof. Harald Garcke. Aus Satz 2.52 folgt, dass $f - h_j$ eine hebbare Singularität bei z_j hat. Wir definieren nun

$$g: \Omega \cap B_R(\tilde{z}_0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } g(z) = f(z) - \sum_{j=0}^N h_j(z) \text{ für alle } z \in (\Omega \cap B_R(\tilde{z}_0)) \setminus S.$$

Da $\Omega \cap B_R(\tilde{z}_0)$ ebenfalls ein Sterngebiet mit Zentrum \tilde{z}_0 ist, folgt aus Folgerung 2.18, dass g eine Stammfunktion besitzt (in $\Omega \cap B_R(\tilde{z}_0)$). Also gilt $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ bzw.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=0}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h_j(z) dz \quad (2.33)$$

Da $h_j(z) = c_{-1}^j (z - z_j)^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n}^j (z - z_j)^{-n}$ und $z \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n}^j (z - z_j)^{-n}$ wegen Bemerkung 2.46 die Stammfunktion $z \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n}^j \frac{(z - z_j)^{-n+1}}{-n+1}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ besitzt, folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h_j(z) dz = c_{-1}^j \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_j} dz + 0 = \text{Res}_{z_0}(f) \nu_{\gamma}(z_j)$$

Schließlich gilt für alle $z'_0 \in S \setminus B_R(\tilde{z}_0)$:

$$\nu_{\gamma}(z'_0) = 0,$$

da $z'_0 \mapsto \frac{1}{z - z'_0}$ in $B_R(\tilde{z}_0) \supseteq \gamma([a, b])$ holomorph ist. Aus (2.33) folgt schließlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_0 \in S} \text{Res}_{z_0}(f) \nu_{\gamma}(z_0),$$

da $\nu_{\gamma}(z_0) = 0$, falls $z_0 \notin B_R(\tilde{z}_0)$. ■

Bemerkung 2.59 Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \setminus S$ eine stückweise stetig differenzierbare, geschlossene, positiv orientierte Jordan-Kurve, so gilt

$$\nu_{\gamma}(z_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z_0 \in I(\gamma), \\ 0, & \text{falls } z_0 \in A(\gamma), \end{cases}$$

wegen Satz 2.24 bzw. Satz 2.15. In diesem Fall reduziert sich (2.32) auf:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z_0 \in I(\gamma) \cap S} \text{Res}_{z_0}(f). \quad (2.34)$$

Für die Berechnung von Residuen ist nützlich:

Lemma 2.60 Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 sei ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ von f und $g: B_\varepsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, sodass $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$ und $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dann gilt:

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) \quad (2.35)$$

Bemerkung: Im Fall $m = 1$ erhält man:

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = g(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0, \\ z \neq z_0}} (z - z_0) f(z) \quad (2.36)$$

Beweis: Nach Beispiel 2.48 gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} \underbrace{d_{n+m}}_{c_n} (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_\varepsilon(z_0), z \neq z_0,$$

wobei $d_k = g^{(k)}(z_0)/k!$. Es folgt:

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

■

Lemma 2.61 Seien $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ sei eine einfache Nullstelle von g , d.h. $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad (2.37)$$

Beweis: Folgt aus (2.36):

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{f}{g} \right) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \underbrace{\frac{(z - z_0)}{g(z) - g(z_0)}}_{\rightarrow \frac{1}{g'(z_0)}} f(z) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

■

2.6 Residuenkalkül

2.6.1 Integrale über \mathbb{R}

Lemma 2.62 Seien P, Q Polynome und $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $Q(z) \neq 0$. Außerdem gelte $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gebe $M, \tilde{R} > 0$ so, dass

$$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{für alle } |z| \geq \tilde{R} \quad (2.38)$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{z_0 \in S_+} \operatorname{Res}_{z_0} R$$

wobei $S_+ = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid Q(z_0) = 0, \operatorname{Im} z_0 > 0\}$.

Beweis: Für $r > 0$ sei $\alpha_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\alpha_r(t) = re^{it}$ für alle $t \in [0, \pi]$. Wir wählen r so groß, dass $S_+ \subseteq B_r(0)$ sowie $r \geq \tilde{R}$ gilt. Dann folgt aus (2.34)

$$\int_{-r}^r R(x)dx + \int_{\alpha_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in S_+} \operatorname{Res}_{z_0} R$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_r} R(z)dz \right| &\leq L(\alpha_r) \frac{M}{r^2} = \frac{\pi M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{-r}^r R(x)dx + \int_{\alpha_r} R(z)dz \right) = 2\pi i \sum_{z_0 \in S_+} \operatorname{Res}_{z_0} R \end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.63 Wenn (2.38) gilt, so sagt man “ f verschwindet bei ∞ von mindestens zweiter Ordnung”.

Beispiel 2.64 Sei $R(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Dann hat R die Polstellen erster Ordnung

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dabei gilt $\operatorname{Im} z_k > 0$ genau dann wenn $k \in \{0, 1\}$. Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}_{z_0} R + \operatorname{Res}_{z_1} R) = 2\pi i \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} \right)$$

wegen Lemma 2.61.

2.6.2 Trigonometrische Integrale

Lemma 2.65 Es seien $P, Q: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ Polynome so, dass $Q(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = 1$, sowie $R(z, w) = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)}$ und

$$\tilde{R}(z) := \frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1}) \right)$$

Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{z_0 \in S} \operatorname{Res}_{z_0} \tilde{R} \tag{2.39}$$

wobei S die Menge aller Pole von \tilde{R} in $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Beweis: Für $z = e^{it} =: \gamma(t), t \in [0, 2\pi]$, gilt $\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$. Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \tilde{R}(\gamma(t)) \underbrace{\gamma(t)}_{\frac{1}{i}\gamma'(t)} dt = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz \stackrel{(2.34)}{=} 2\pi \sum_{z_0 \in S} \operatorname{Res}_{z_0} \tilde{R}.$$

■

Beispiel 2.66 Für $p \in \mathbb{C}$ mit $|p| \neq 1$ sei $R(z, w) = \frac{1}{1-2pz+p^2}$. Dann gilt

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-2p\frac{1}{2}(z+z^{-1})+p^2} = \frac{1}{(z-p)(1-pz)}$$

und \tilde{R} hat einen Pol in $B_1(0)$ (der Ordnung 1), nämlich p , falls $|p| < 1$, und $\frac{1}{p}$, falls $|p| > 1$. Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p \cos t + p^2} dt \stackrel{(2.36) \& (2.39)}{=} \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{falls } |p| < 1, \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{falls } |p| > 1. \end{cases}$$

3 Separationsansatz für partielle Differentialgleichungen

Im Folgenden werden wir eine Methode vorstellen mit der explizite Lösungsformeln für viele partielle Differentialgleichungen im Fall von geeigneten Symmetrien hergeleitet werden können. In einfach Fällen führt dies auf Lösungsformeln mit Hilfe von Fourierreihen. In anderen Fällen müssen allgemeinere angepasste Orthonormalbasen verwendet werden, die wir im darauf folgenden Kapitel diskutiert werden.

3.1 Die schwingende Saite

Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t) \quad \text{für alle } x \in (0, 1), t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

mit der Randbedingung

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1], \quad (3.3)$$

$$\partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Hierbei beschreibt $u: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die vertikale Position einer schwingenden Saite (oder eines anderen schwingenden Objektes) über dem Punkt x zum Zeitpunkt t . Die Randbedingungen beschreiben, dass die Saite an den beiden Enden $x = 0$ und $x = 1$ eingespannt ist und $u_0, u_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Position und die Geschwindigkeit der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$. Außerdem ist $c > 0$ eine Ausbreitungsgeschwindigkeit die von der Dichte, dem Durchmesser und der Spannkraft der Saite abhängt. Hierbei wird angenommen, dass das Material der Saite homogen ist und der Einfachheit die Länge der Saite eins ist. Schlielich nehmen wir an, dass u_0, u_1 die *Kompatibilitätsbedingungen*

$$u_0(0) = u_0(1) = u_1(0) = u_1(1) = u_0''(0) = u_1''(0) = 0. \quad (3.5)$$

1. Schritt: Separationsansatz Im Folgenden leiten wir spezielle Lösung von (3.1) in der Form

$$u(x, t) = f(x)g(t) \quad \text{für alle } x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

wobei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar seien. Dann ist (3.1) äquivalent zu

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) \quad \text{für alle } x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}.$$

Nehmen wir an, dass $f(x) \neq 0, g(t) \neq 0$, so ist dies äquivalent zu

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Da die rechte Seite unabhängig von t ist und die linke Seite unabhängig von x , muss es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$\lambda = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}$$

bzw.

$$\lambda c^2 g(t) = g''(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

$$\lambda f(x) = f''(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1). \tag{3.8}$$

Dies sind zwei lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Polynome durch

$$p(z) = z^2 - \lambda c^2 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{p}(z) = z^2 - c^2.$$

Wir suchen nun nicht-triviale Lösungen dieser Differentialgleichungen, sodass $f(0) = f(1) = 0$ gilt, damit die Randbedingung erfüllt ist.

1. Fall: $\lambda > 0$: Dann lautet die allgemeine Lösung von (3.8)

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}cx} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}cx} \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus $f(0) = f(1) = 0$ folgt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}c} & e^{-\sqrt{\lambda}c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante der Matrix nicht Null ist, folgt $c_1 = c_2 = 0$. D.h. es gibt keine nicht-trivialen Lösungen von (3.7).

2. Fall: $\lambda = 0$: Dann lautet die allgemeine Lösung von (3.8)

$$f(x) = c_1 + c_2 x \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus $f(0) = f(1) = 0$ erhält man sofort $c_1 = c_2 = 0$, d.h. es gibt auch in diesem fall keine nicht-trivialen Lösungen.

3. Fall: $\lambda < 0$: Es sei $\mu = \sqrt{-\lambda}$. Dann gilt $\lambda = -\mu^2$ und die allgemeine Lösung von (3.8) lautet

$$f(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Da $f(0) = 0$, folgt $c_1 = 0$. Aus $f(1) = 0$ folgt außerdem die Bedingung

$$0 = c_2 \sin(\mu).$$

Damit es eine nicht-triviale Lösung gibt, muss $\sin(\mu) = 0$ gelten. Daraus folgt $\mu = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die allgemeine Lösung von (3.8) in diesem Fall lautet

$$g(t) = a \cos(ck\pi t) + b \sin(ck\pi t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dies liefert insgesamt die Lösungen von (3.1) und (3.2)

$$u(x, t) = a_k \cos(ck\pi t) \sin(k\pi x) + b_k \sin(ck\pi t) \sin(k\pi x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig sind.

2. Schritt: Allgemeine Lösung:

Summiert man die Lösungen in (3.9) bzgl. $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir formal die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(ck\pi t) \sin(k\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(ck\pi t) \sin(k\pi x) \quad (3.10)$$

für alle $x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}$, wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ unbestimmt sind und die Konvergenz der Reihen nicht geklärt ist. Formales Differenzieren liefert außerdem

$$\partial_t u(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} ck\pi a_k \sin(ck\pi t) \sin(k\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} ck\pi b_k \cos(ck\pi t) \sin(k\pi x)$$

für alle $x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}$ und die Anfangsbedingungen (3.3)-(3.4) liefern die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \quad (3.11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ck\pi b_k \sin(k\pi x) = u_1(x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1] \quad (3.12)$$

da $\sin(ck\pi 0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nimmt man nun an, dass

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin(k\pi x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin(k\pi x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

vgl. Folgerung 3.14 der "Analysis II für Physiker", so liefert ein Koeffizienten-Vergleich

$$\tilde{a}_k = a_k, \quad \tilde{b}_k = ck\pi b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dadurch ist u eindeutig bestimmt. Das dies teils formale Vorgehen unter geeigneten Bedingungen an u_0, u_1 wirklich die eindeutige Lösung liefert folgt aus:

Satz 3.1 *Es seien $u_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $u_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dreimal bzw. zweimal stetig differenzierbar und (3.5) erfüllt. Dann gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die (3.1)-(3.4) löst. Sie ist gegeben durch (3.10), wobei*

$$a_k = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x) dx \quad b_k = \frac{2}{c\pi k} \int_0^1 u_1(x) \sin(k\pi x) dx \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Außerdem konvergiert die Reihe in (3.10) gleichmäßig bzgl. $x \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$.

Beweisskizze:

Existenz: Wegen Folgerung 3.14 der “Analysis II für Physiker” gilt

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin(k\pi x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

mit a_k wie im Satz und $\tilde{b}_k = c\pi k b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sind außerdem $v_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodische Funktionen mit

$$v_j(x) = \begin{cases} u_j\left(\frac{x}{\pi}\right) & \text{falls } x \in [0, \pi], \\ -u_j\left(-\frac{x}{\pi}\right) & \text{falls } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

für $j = 1, 2$, so folgt aus (3.5), dass v_0 zweimal stetig differenzierbar, v_1 einmal stetig differenzierbar und v_0'' sowie v_1' stückweise stetig differenzierbar ist. Daraus folgt, dass die Fourierreihen von v_0, v_0', v_0'', v_1 und v_1' gleichmäßig konvergiert. Genauer folgt wie im Beweis von Satz 3.11 der “Analysis II für Physiker”, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^j |a_k| < \infty \quad \text{für } j = 0, 1, 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^j |b_k| < \infty \quad \text{für } j = 0, 1,$$

da Differentiation der Fourierreihe einen Faktor ik vor \hat{f}_k liefert. Daraus folgt, dass die Reihe in (3.10) gleichmäßig bezüglich $x \in [0, 1]$ und $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Somit ist u durch (3.10) wohldefiniert und stetig, da

$$|a_k \cos(ck\pi t) \sin(k\pi x) + b_k \sin(ck\pi t) \sin(k\pi x)| \leq |a_k| + |b_k| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und wegen Satz 3.12 der “Analysis II für Physiker”. Außerdem konvergiert die Reihe in (3.10) gleichmäßig bezüglich $x \in [0, 1]$ und $t \in \mathbb{R}$, wenn man deren Summanden partiell nach x oder t differenziert, da

$$|a_k \partial_x(\cos(ck\pi t) \sin(k\pi x)) + b_k \partial_x(\sin(ck\pi t) \sin(k\pi x))| \leq \pi k (|a_k| + |b_k|),$$

$$|a_k \partial_t(\cos(ck\pi t) \sin(k\pi x)) + b_k \partial_t(\sin(ck\pi t) \sin(k\pi x))| \leq \pi k (|a_k| + |b_k|)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass u stetig partiell differenzierbar ist und man die partiellen Ableitung mit der Reihe vertauschen kann. Das gleiche gilt auch für die zweiten partiellen

Ableitungen. Damit lässt sich nun leicht verifizieren, dass u (3.1) löst. Schließlich gilt (3.2), da $\sin(k\pi 0) = \sin(k\pi 1) = 0$, und

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) + 0 = u_0(x) && \text{für alle } x \in [0, 1], \\
 \partial_t u(x, 0) &= - \sum_{k=1}^{\infty} (ck\pi) a_k \sin(ck\pi 0) \sin(k\pi x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(ck\pi) b_k}_{\tilde{b}_k} \cos(ck\pi 0) \sin(k\pi x) = 0 + u_1(x) && \text{für alle } x \in [0, 1],
 \end{aligned}$$

da $\cos(ck\pi 0) = 1$, $\sin(ck\pi 0) = 0$. D.h. die Anfangsbedingung ist erfüllt.

Eindeutigkeit: Es seien u_1, u_2 zwei Lösung von (3.1)-(3.4) und $v = u_1 - u_2$. Dann löst v ebenfalls (3.1)-(3.2) und es gilt

$$v(x, 0) = \partial_t v(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Dann folgt aus Aufgabe 1 (ii), 1. Übungsblatt, dass

$$\int_0^1 (\partial_t v(x, t))^2 dx + \int_0^1 (\partial_x v(x, t))^2 dx = \int_0^1 (\partial_t v(x, 0))^2 dx + \int_0^1 (\partial_x v(x, 0))^2 dx = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\partial_x v(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}.$$

Da $v(0, t) = v(1, t) = 0$, folgt daraus $v(x, t) = 0$ für alle $x \in [0, 1], t \in \mathbb{R}$. □

3.2 Die Laplace-Gleichung im Quadrat

Es sei

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Wir betrachten die Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega, \quad (3.13)$$

wobei $u: \bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 u(0, y) &= u(1, y) = 0 && \text{für alle } y \in [0, 1], \\
 u(x, 0) &= 0 && \text{für alle } x \in [0, 1], \\
 u(x, 1) &= f(x) && \text{für alle } x \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Wir nutzen wiederum zunächst den Separationsansatz

$$u(x, y) = g(x)h(y) \quad \text{für alle } x, y \in [0, 1]$$

um nicht-triviale Lösungen von (3.13) zu bekommen. Dies liefert die Gleichung

$$g''(x)h(y) + g(x)h''(y) = 0 \quad \text{für alle } x, y \in (0, 1)$$

bzw.

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)} \quad \text{für alle } x, y \in (0, 1),$$

da die linke bzw. rechte Seite unabhängig von y bzw. x ist, müssen beide Seiten konstant gleich einem $\lambda \in \mathbb{R}$ sein. D.h. wir erhalten

$$\lambda g(x) = g''(x), \quad -\lambda h(y) = h''(y), \quad \text{für alle } x, y \in (0, 1).$$

Außerdem muss wegen der Randbedingungen $g(0) = g(1) = 0$ für gelten. Wie im vorangehenden Kapitel zeigt man, dass man nur nicht-triviale Lösungen erhält, wenn $\lambda = -(k\pi)^2 < 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Lösungen sind dann

$$g(x) = A \sin(k\pi x), \quad h(y) = B \sinh(k\pi y) \quad \text{für alle } x, y \in [0, 1].$$

da $h(0) = 0$ gelten muss. Allgemeine Lösungen erhält man nun durch den Reihenansatz

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y) \quad \text{für alle } x, y \in [0, 1],$$

wobei $A_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ noch bestimmt werden müssen. Ist nun $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar sowie

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

wie in Folgerung 3.14 der "Analysis II für Physiker". Dann lautet die Randbedingung für $y = 1$

$$u(x, 1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh(k\pi) \sin(k\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

für alle $x \in [0, 1]$. Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$A_k = \frac{a_k}{\sinh(k\pi)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir (formal) die Lösung

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sinh(k\pi)} \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y) \quad \text{für alle } x, y \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

Satz 3.2 *Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $f(0) = f(1) = 0$ und u wie in (3.14) definiert. Dann ist $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in Ω beliebig oft differenzierbar und eine Lösung von (3.13) mit den obigen Randbedingungen.*

Beweis: Siehe 8. Übungsblatt, 3. Aufgabe.

Bemerkung: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösung u ist, dass u in $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ eine glatte, d.h., beliebig oft differenzierbare Funktion ist, selbst wenn f nicht überall differenzierbar ist.¹ Dies gilt sogar, wenn die Koeffizienten $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nur beschränkt sind, siehe 8. Übungsblatt, 3. Aufgabe. Ist f eine unstetige Funktion ist, so konvergiert die Reihe in (3.14) nicht mehr gleichmäßig auf $[0, 1] \times [0, 1]$. u ist aber immer noch eine Lösung der Laplace-Gleichung.

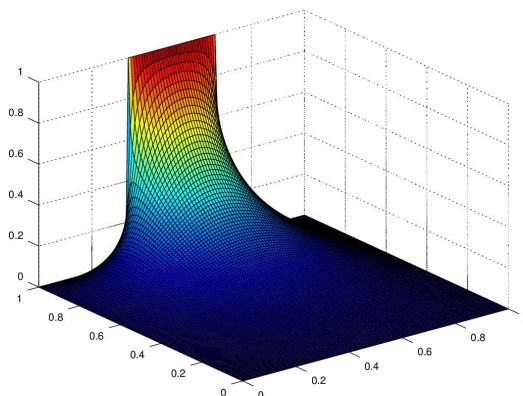


Abbildung 3.1: Ein Beispiel für die Lösung u , wobei $f(x) = 1$ für $x \in [-0.5, 0.5]$ und $f(x) = 0$ sonst.

3.3 Die kreisförmige, schwingende Membran

Wir betrachten zunächst die n -dimensionale Wellengleichung in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. D.h. wir suchen eine stetig Funktion $u: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar in $\Omega \times \mathbb{R}$ ist und die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Omega, t \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

löst sowie die Randbedingung

$$u(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

und die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}, \quad (3.17)$$

$$\partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega} \quad (3.18)$$

¹Für Lösungen der Wellengleichung gilt dies nicht. Damit $u(x, t)$ für $t > 0$ glatt bezüglich x ist, müssen u_0 und u_1 im Allgemeinen schon glatt sein.

erfüllt. Hierbei ist $c > 0$ eine physikalische Konstante und $\Delta u(x, t) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u(x, t)$ der Laplace-Operator bzgl. $x \in \Omega$ angewendet auf u .

Um spezielle Lösungen herzuleiten, machen wir ähnlich wie zuvor den Separationsansatz

$$u(x, t) = g(t)v(x) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, x \in \bar{\Omega},$$

wobei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei und $v: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in Ω zweimal stetig differenzierbar sei. Einsetzen in (3.15) und auflösen liefert dann ähnlich wie zuvor

$$\frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Da die linke bzw. rechte Seite unabhängig von x bzw. t ist, gibt es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\lambda = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, x \in \Omega.$$

Das liefert die Differentialgleichungen

$$\lambda c^2 g(t) - g''(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

$$\lambda v(x) - \Delta v(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \quad (3.20)$$

wobei v zusätzlich die (Dirichlet-)Randbedingung

$$v(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega \quad (3.21)$$

erfülle. Die Gleichung (3.20) wird oft als *Helmholtz-Gleichung* bezeichnet. Es stellt sich nun die Frage für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ (3.20)-(3.21) (und damit (3.19)-(3.21)) eine nicht-triviale Lösung v besitzt. Ein solches v wird auch *Eigenfunktion* und das zugehörige λ als *Eigenwert* vom *Laplace-Operator* mit Dirichlet-Randbedingungen bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Eigenwerte immer negativ sind und dass es eine Folge von Eigenwerten λ_k , $k \in \mathbb{N}$, und zugehörigen Eigenfunktionen v_k , $k \in \mathbb{N}$, gibt. In Spezialfällen werden wir dies verifizieren. Im Fall $\Omega = (0, 1)$ haben wir schon in Abschnitt 3.1 gesehen, dass $\lambda_k = -(\pi k)^2$, $v_k(x) = \sin(k\pi x)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Ist nun allgemein v_k eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_k = -\mu_k^2$ mit $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, so definiert

$$u(x, t) = A_k \cos(c\mu_k t)v_k(x) + B_k \sin(c\mu_k t)v_k(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}$$

eine Lösung von (3.15)-(3.16), wobei $A_k, B_k \in \mathbb{R}$ noch unbestimmte Konstanten sind und $\frac{c\mu_k}{2\pi}$ ist die Frequenz der durch u beschriebenen Schwingung in der Zeit. Diese Frequenzen werden auch als *Eigenfrequenzen* von Ω bezeichnet. Die allgemeine Lösung erhält man dann zunächst formal durch den Reihenansatz

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(c\mu_k t)v_k(x) + B_k \sin(c\mu_k t)v_k(x) \quad (3.22)$$

und man bestimmt A_k, B_k , $k \in \mathbb{N}$, sodass die Anfangsbedingungen (3.17)-(3.18) erfüllt sind. Ob dies möglich ist und wann und in welchem Sinn die Reihe in (3.22) konvergiert, wird aber im Folgenden noch geklärt werden müssen.

Für ein beliebiges beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist es im Allgemeinen nicht möglich die Eigenwerte λ_k und Eigenfunktionen v_k explizit zu berechnen. Für Gebiet mit speziellen Symmetrien ist dies aber wiederum mit einem Separationsansatz möglich. Um die Idee zu demonstrieren, betrachten wir den Fall einer Kreisscheibe $\Omega = B_R(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$, wobei $R > 0$. Aufgrund der Rotationssymmetrie ist es zweckmäßig Polarkoordinaten zu verwenden und v in Abhängigkeit von $r \in [0, R]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ auszudrücken. Dann ist (3.20) äquivalent zu

$$\lambda v(r, \varphi) - \partial_r^2 v(r, \varphi) - \frac{1}{r} \partial_r v(r, \varphi) - \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 v(r, \varphi) = 0, \quad (3.23)$$

siehe z.B. 3. Übungsblatt, 1. Aufgabe, Analysis II für Physiker. Dies motiviert den Separationsansatz

$$v(r, \varphi) = w(r)q(\varphi),$$

wobei $w: [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$, $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar seien und q 2π -periodisch sei. Außerdem gelte $w(R) = 0$ wegen (3.21) und $w'(0) = 0$, damit $\Omega \ni x \mapsto w(|x|) \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar wird. Setzt man den Ansatz in (3.23) ein, so erhält man

$$\lambda w(r)q(\varphi) - w''(r)q(\varphi) - \frac{1}{r}w'(r)q(\varphi) - \frac{1}{r^2}w(r)q''(\varphi) = 0 \quad \text{für alle } r \in (0, R), \varphi \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\frac{1}{w(r)} (\lambda r^2 w(r) - r^2 w''(r) - r w'(r)) = \frac{q''(\varphi)}{q(\varphi)}$$

sofern $w(r), q(\varphi) \neq 0$. Da die linke bzw. rechte Seite unabhängig von r bzw. φ ist, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten $\nu \in \mathbb{R}$ sein. Daraus folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} q''(\varphi) - \nu q(\varphi) &= 0 & \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}, & \quad (3.24) \\ r^2 w''(r) + r w'(r) + (r^2 \mu^2 + \nu) w(r) &= 0 & \text{für alle } r \in (0, R) \end{aligned}$$

mit $\lambda = -\mu^2$. Ähnlich wie in Abschnitt 3.1 kann man zeigen, dass (3.24) nur dann eine nicht-triviale, 2π -periodische Lösung hat, wenn $\nu = -m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$q_m(\varphi) = a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}, \quad (3.25)$$

wobei a_m, b_m noch unbestimmt sind. Damit bleibt es noch $\mu > 0$ zu finden, sodass es nicht-triviale Lösungen von

$$r^2 w''(r) + r w'(r) + (r^2 \mu^2 - m^2) w(r) = 0 \quad \text{für alle } r \in (0, R) \quad (3.26)$$

mit den Randbedingungen

$$w'(0) = 0, \quad w(R) = 0 \quad (3.27)$$

gibt. Dabei ist (3.26)-(3.27) ein sogenanntes *Randwertproblem* für eine gewöhnlich Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um die vorangehenden Fragen zu beantworten, werden wir im folgenden Kapitel solche Randwertprobleme studieren.

4 Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Unendliche Orthogonalsysteme und Prähilberträume

Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für das Studium von Randwertproblemen und zugehörigen Eigenwertproblemen benötigen wir einen allgemeinen Begriff von Skalarprodukt und orthogonalität. Dazu:

Definition 4.1 (Skalarprodukt, Prähilbertraum)

Es sei H ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ Skalarprodukt, falls:

1. Für alle $x, y, x_1, x_2 \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y), \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y).$$

2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ für alle $x, y \in H$.

3. Für alle $x \in H$ gilt:

$$(x, x) \geq 0 \text{ und } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ein \mathbb{K} -Vektorraum H mit einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Prähilbertraum.

Bemerkung: Ist (\cdot, \cdot) ein Skalarprodukt, so gelten auch

$$(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y), \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$

für alle $x, y, z \in H$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.

Das folgende Lemma enthält die fundamentalen Eigenschaften eines Skalarproduktes:

Lemma 4.2 Es sei $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt und $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ für alle $x \in H$. Dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H \tag{4.1}$$

und $\|\cdot\|$ ist eine Norm, d.h. es gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

für alle $x, y \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$ sowie $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

Beweis: Zu (4.1): Für $\alpha, \beta > 0$ gilt:

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{|\alpha|^2} + \frac{\|y\|^2}{|\beta|^2} - 2\operatorname{Re} \left(\frac{(x-y)}{\alpha\beta} \right)$$

und somit

$$2\operatorname{Re}(x, y) \leq \frac{\beta}{\alpha} \|x\|^2 + \frac{\alpha}{\beta} \|y\|^2$$

Setzt man nun $\alpha = \|x\| + \varepsilon, \beta = \|y\| + \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$, so erhält man

$$2\operatorname{Re}(x, y) \leq (\|y\| + \varepsilon)\|x\| + (\|x\| + \varepsilon)\|y\|$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt

$$2\operatorname{Re}(x, y) \leq 2\|x\|\|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H$$

Ersetzt man x durch $\overline{(x, y)}x$, so folgt

$$|(x, y)|^2 \leq |(x, y)|\|x\|\|y\| \quad \text{für alle } x, y \in H$$

und somit (4.1).

$\|\cdot\|$ ist eine Norm: Für alle $x \in H, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha \bar{\alpha} (x, x) = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

Außerdem gilt:

$$0 = \|x\| \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Schließlich folgt aus (4.1) für alle $x, y \in H$:

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

■

Im Folgenden heißt $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wird mit $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{K})$ bezeichnet.

Beispiele 4.3 1. Ist $H = \mathbb{R}^n$, dann wird durch $(x, y) = x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n definiert.

2. Es sei $H = \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{K}) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}\}$ und

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{K})$$

Dann erfüllt (\cdot, \cdot) alle Eigenschaften des Skalarproduktes bis auf die letzte. In diesem Fall gilt nur

$$(f, f) = 0 \Leftrightarrow \text{Es gibt eine Jordan-Nullmenge } N, \text{ sodass } f(x) = 0 \forall x \in [a, b] \setminus N,$$

da eine Abänderung von f auf einer Jordan-Nullmenge den Wert des Riemann-Integrals nicht ändert. (Ohne Beweis) Identifiziert man aber Funktionen, die bis auf eine Jordan-Nullmenge übereinstimmen, so ist (\cdot, \cdot) auf H wieder ein Skalarprodukt und alle Aussagen von zuvor können angewendet werden.

3. Es sei

$$H = \ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} : a_k \in \mathbb{C} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ und } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

Dann definiert

$$(a, b) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \bar{b}_k \quad \text{für alle } a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}, b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

ein Skalarprodukt.

Bemerkung 4.4 Somit wird durch $d: H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in H$$

eine Metrik auf H definiert. Dementsprechend konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ in H gegen $x \in H$ genau dann, wenn $\|x_n - x\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Aus (4.1) folgt die Stetigkeit des Skalarproduktes, d.h.

$$(x_n, y_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (x, y)$$

sofern $x_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} x$ und $y_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} y$ in H . (Beweis: Übung)

Definition 4.5 Sei H ein Prähilbertraum. Dann heißt $\{e_k : k \in N\} \subseteq H, N \subseteq \mathbb{N}$, Orthogonalsystem, falls $(e_k, e_l)_H = 0$ für alle $k \neq l, k, l \in N$, und $e_k \neq 0$ für alle $k \in N$ und Orthonormalsystem, falls sogar $\|e_k\|_H = 1$ für alle $k \in N$ gilt.

Beispiel 4.6 1. Es seien $e_k(x) = e^{ikx}$ für alle $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ und $H = \mathcal{R}([-\pi, \pi], b]; \mathbb{K})$ mit Skalarprodukt

$$(f, g)_H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in H.$$

In Satz 3.1 der Analysis II für Physiker wurde gezeigt, dass $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthogonalsystem in H bilden.

2. Es bilden

$$\{1, \sqrt{2} \cos(kx), \sqrt{2} \sin(kx) : k \in \mathbb{N}\}$$

ebenfalls ein Orthonormalsystem in $H = \mathcal{R}([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ (mit gleichem Skalarprodukt). Beweis: Übung.

Für das Folgende sei

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$$

der von e_1, \dots, e_n aufgespannte Unterraum von H ,

$$\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

und

$$\text{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$$

der Abstand von $x \in H$ zu einer Menge $M \subseteq H$.

Lemma 4.7 (Besselsche Ungleichung)

Sei $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum H . Dann gilt für jedes $x \in H$

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|^2 = \text{dist}(x, \text{span}\{e_1, \dots, e_n\})^2$$

Beweis: Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ist

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x, e_k) \overline{\alpha_k} - \sum_{k=1}^n \alpha_k (e_k, x)_H + \underbrace{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2}_{= \|\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2} \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, e_k) - \alpha_k|^2, \end{aligned}$$

d.h. der Ausdruck wird minimal, falls $\alpha_k = (x, e_k)$ für alle $k = 1, \dots, n$. ■

Lemma 4.8 (Riemann-Lebesgue)

Es sei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum H . Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x, e_k) = 0 \quad \text{für alle } x \in H.$$

Beweis: Aus Lemma 4.7 folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Da die Reihe konvergiert, folgt notwendiger Weise $\lim_{k \rightarrow \infty} (x, e_k) = 0$. ■

Definition 4.9 (Orthonormalbasis)

Es sei $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in einem Prähilbertraum H . Dann heißt $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ Orthonormalbasis (ONB) von H , falls $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ dicht in H ist, d.h. für alle $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$.

Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen:

Satz 4.10 Es sei H ein Prähilbertraum (mit $\dim H = \infty$) und $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

1.) $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in H (d.h. $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis).

2.) Für alle $x \in H$ gilt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad \text{in } H$$

3.) Für alle $x, y \in H$ gilt die Parseval-Identität

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) \overline{(y, e_k)}$$

4. Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \quad \text{für alle } x \in H \tag{4.2}$$

Beweis: "1. \Rightarrow 3.":

Sei $x \in H$. Da $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ dicht in H ist, gibt es eine Folge $x_n = \sum_{k=1}^{m_n} \alpha_{n,k} e_k$ mit $n, m_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n,k} \in \mathbb{K}$ und $x_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} x$ in H . Für $n \in \mathbb{N}$ und $m \geq m_n$ folgt aus Lemma 4.7

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &\geq \text{dist}(x, \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}) \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^m (x, e_k) e_k \right\| \\ &\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (x, e_k) e_k = x, \quad \text{da } \|x - x_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

"2. \Rightarrow 3.:" Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt:

$$\begin{aligned} (x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \sum_{l=1}^n (y, e_l) e_l \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k,l=1}^n (x, e_k) \overline{(y, e_l)} \underbrace{(e_k, e_l)}_{=\delta_{k,l}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x, e_k) \overline{(y, e_k)} \end{aligned}$$

“3. \Rightarrow 4.:

 Setze $y = x$

“4. \Rightarrow 1.:

 Nach Lemma 4.7 gilt:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{nach (4.2)}$$

■

Als Folgerung erhalten wir

Satz 4.11 *Es sei $f \in H := \mathcal{R}([- \pi, \pi]; \mathbb{C})$. Dann gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N f(x)|^2 dx = 0.$$

Man sagt auch die *Fourierreihe von f konvergiert im quadratischen Mittel oder in L^2 gegen f* .¹ Außerdem gilt die *Parseval-Identität*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (|a_k|^2 + |b_k|^2). \quad (4.3)$$

Beweis: Es seien $e_k(x) := e^{ikx}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Wegen Satz 4.10 reicht es zu zeigen, dass $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $H = \mathcal{R}([- \pi, \pi]; \mathbb{C})$ ist. Seien dazu $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{R}([- \pi, \pi]; \mathbb{C})$ beliebig. Für die erste Aussage müssen wir zeigen, dass es ein trigonometrisches Polynom $p \in \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ gibt mit

$$\|f - p\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Aufgrund der Definition vom Riemann-Integral gibt es eine Treppenfunktion $T : [- \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, sodass

$$|f(x) - T(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in [- \pi, \pi].$$

Daraus folgt

$$\|f - T\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2\pi \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits kann man zur Treppenfunktion T leicht eine stetige, stückweise lineare/differenzierbare Funktion $g : [- \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(-\pi) = g(\pi) = 0$ konstruieren, sodass $\|T - g\| < \frac{\varepsilon}{4}$. (Siehe Abbildung 4.1 für den Fall, dass T reellwertig ist) Wegen Satz 3.11 der “Analysis II für Physiker” gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sup_{x \in [- \pi, \pi]} |S_N(g)(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

¹Die letzte Bezeichnung kommt daher, dass $L^2([- \pi, \pi])$ den Raum Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : [- \pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ bezeichnet.

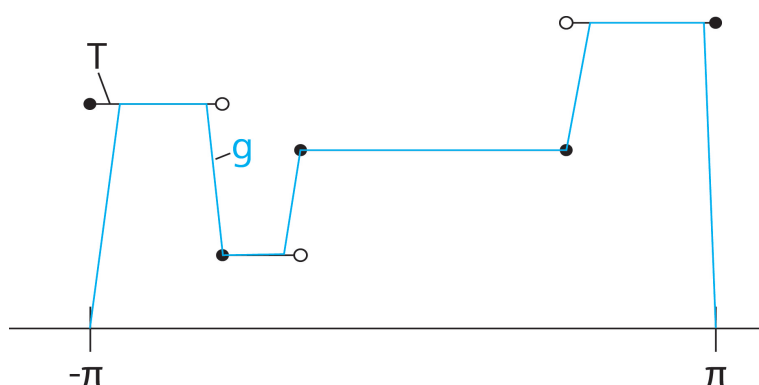


Abbildung 4.1: Beispiel für eine stetig, stückweise lineare Approximation einer Treppenfunktion

Daraus folgt

$$\|S_N(g) - g\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|S_N g(x) - g(x)|^2}_{\leq \frac{\varepsilon^2}{32\pi}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi \frac{\varepsilon^2}{32\pi}} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|f - S_N(g)\| \leq \|f - T\| + \|T - g\| + \|g - S_N(g)\| < \varepsilon.$$

Da $S_N(g) \in \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ und f, ε beliebig waren, folgt daraus die Dichtheit von $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Schließlich folgt (4.3) aus Satz 4.10 sowie

$$\begin{aligned} (f, e_k) &= \hat{f}_k \\ (f, \sqrt{2} \cos(k \cdot)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} a_k \\ (f, \sqrt{2} \sin(k \cdot)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} b_k \\ (f, 1) &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und Beispiel 4.6. ■

Beispiel 4.12 Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = |x|$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} \\ \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2k-1)^4} \end{aligned}$$

Wegen (4.3) folgt daraus

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2k-1)^4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

4.2 Sturmsche Randwertprobleme

Der Separationsansatz und viele andere physikalische Probleme führen oft auf lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$(Lu)(x) := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b) \quad (4.4)$$

zusammen mit *Randbedingungen* der Form

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a)u'(a) = \eta_1, \quad (4.5)$$

$$R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b)u'(b) = \eta_2, \quad (4.6)$$

wobei voraussetzen:

Annahme 4.13 (Reguläres Randwertproblem)

$p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar, $q, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig, $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ sowie $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

Falls $\eta_1 = \eta_2 = 0$ spricht man von *homogenen Randbedingungen*.

Im Fall $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \beta_2 = 0$ erhält man die sogenannte *Dirichlet-Randbedingung*:

$$u(a) = u(b) = 0$$

und im Fall $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \alpha_2 = \beta_2 = 1$ erhält man die sogenannte *Neumann-Randbedingung*:

$$u'(a) = u'(b) = 0.$$

Beispiele 4.14 1. Für $p(x) = 1$ und $q(x) = \lambda > 0$ für alle $x \in [a, b]$ erhält man die Schwingungsgleichung

$$u''(x) = -\lambda u(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

In diesem Fall sind die Bedingung an p, q in Annahme 4.13 erfüllt.

2. Für $p(x) = x$ und $q(x) = x\mu^2 - \frac{m^2}{x}$ für alle $x \in (0, R]$ ist (4.4) äquivalent zu

$$0 = (xu'(x))' + q(x)u(x) = xu''(x) + u'(x) + \left(x\mu^2 - \frac{m^2}{x}\right)u(x)$$

für alle $x \in (0, R]$. Dividiert man durch x erhält man (3.26) (mit x statt r). In diesem Fall ist Annahme 4.13 nicht erfüllt, da $p(0) = 0$. Es gilt allerdings $p(x) > 0$ für alle $x \in (0, R]$. Man spricht in diesem Fall von einem *singulären Randwertproblem* und vieles im Folgenden lässt sich auch auf solche Probleme unter geeigneten Annahmen übertragen.

Die spezielle Form der Gleichung (4.4) ist wichtig für das folgende Resultat

Satz 4.15 *Es gelte Annahme 4.13 und es seien $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und L wie in (4.4). Dann gilt die Lagrange-Identität*

$$v(x)(Lu)(x) - u(x)(Lv)(x) = \frac{d}{dx} (p(x)(u'(x)v(x) - v'(x)u(x))) \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \quad (4.7)$$

Außerdem gilt

$$\int_a^b v(x)(Lu)(x) dx = \int_a^b u(x)(Lv)(x) dx \quad (4.8)$$

falls $R_1u = R_2u = R_1v = R_2v = 0$.

Bemerkung: Wegen (4.8) sagt man, dass der Differentialoperator L *symmetrisch* (oder *formal selbstadjungiert*) bezüglich des Skalarproduktes

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx$$

ist.

Beweis von Satz 4.15: Zunächst erhält man (4.7) durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (p(x)(u'(x)v(x) - v'(x)u(x))) \\ &= (p(x)u'(x))'v(x) + p(x)u'(x)v'(x) - (p(x)v'(x))'u(x) - p(x)v'(x)u'(x) \\ &= (p(x)u'(x))'v(x) + q(x)u(x)v(x) - (p(x)v'(x))'u(x) - q(x)v(x)u(x) \\ &= v(x)(Lu)(x) - u(x)(Lv)(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Nun gelte außerdem $R_1u = R_2u = R_1v = R_2v = 0$. Integration von (4.7) liefert nun

$$\int_a^b v(x)(Lu)(x) dx - \int_a^b u(x)(Lv)(x) dx = p(x)(u'(x)v(x) - v'(x)u(x)) \Big|_{x=a}^b$$

Behauptung: $p(a)(u'(a)v(a) - v'(a)u(a)) = 0$

Beweis: Falls $\alpha_2 = 0$, gilt $R_1u = \alpha_1u(a) = 0 = R_1v = \alpha_1v(a)$ mit $\alpha_1 \neq 0$. Daraus folgt $u(a) = v(a) = 0$ und somit die Behauptung. Falls $\alpha_2 \neq 0$, folgt aus $R_1u = R_2v = 0$, dass

$$u'(a) = \delta u(a), \quad v'(a) = \delta v(a) \quad \text{mit } \delta = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 p(a)}.$$

Daraus folgt

$$p(a)(u'(a)v(a) - v'(a)u(a)) = p(a)(\delta u(a)v(a) - \delta v(a)u(a)) = 0$$

und somit die Behauptung.

Genauso zeigt man $p(b)(u'(b)v(b) - v'(b)u(b)) = 0$. Daraus folgt (4.8). ■

Bevor wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des obigen Randwertproblems kommen, fassen wir für uns wichtiger Resultate aus der Analysis II für Physiker angewendet auf diesen Fall zusammen:

Satz 4.16 *Es gelte Annahme 4.13 und es sei $x_0 \in [a, b]$ sowie*

$$\mathcal{L}_H = \{u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ zweimal stetig differenzierbar} : Lu(x) = 0 \forall x \in [a, b]\}.$$

Dann gilt:

1. \mathcal{L}_H ist ein zweidimensionaler Vektorraum.
2. $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_H$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Wronski-Determinante}) \quad (4.9)$$

für ein $x \in [a, b]$. Ist dies der Fall, so gilt (4.9) für alle $x \in [a, b]$.

3. Es sei u_s eine (spezielle) Lösung von (4.4). Dann ist u genau dann eine Lösung von (4.4), wenn es ein $u_h \in L_h$ gibt mit $u = u_s + u_h$.
4. Für alle $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die (4.4) zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$u(x_0) = u_0 \quad \text{und} \quad u'(x_0) = u_1$$

löst.

Beweis: Da $p(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, ist (4.4) äquivalent zu

$$u''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}u'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Somit folgen die Aussagen aus Satz 2.35 der Vorlesung "Analysis II für Physiker". ■

Definition 4.17 *Ein Fundamentalsystem von (4.4) ist eine Basis von L_h , d.h. $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_H$, sodass (4.9) für ein $x_0 \in [a, b]$ gilt.*

Satz 4.18 *Es sei u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von (4.4) und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt das Randwertproblem (4.4)-(4.6) genau dann eine eindeutige Lösung für alle $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, wenn das homogene Randwertproblem, d.h. (4.4)-(4.6) mit $g \equiv 0$ und $\eta_1 = \eta_2 = 0$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$\det \begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (4.10)$$

Beweis: Es sei u_s eine spezielle Lösung von (4.4). (Eine solche existiert wegen Satz 4.16.4.) Dann ist u genau dann eine Lösung von (4.4), wenn es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$u(x) = u_s(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Ist dies der Fall, so gilt

$$R_j u = R_j u_s + c_1 R_j u_1 + c_2 R_j u_2, \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Deswegen sind (4.5)-(4.6) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 - R_1 u_s \\ \eta_2 - R_2 u_s \end{pmatrix}.$$

Somit gibt es genau dann eine eindeutige Lösung u von (4.4)-(4.6), wenn das vorangehende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn (4.10) gilt. Ist $g \equiv 0$ und $\eta_1 = \eta_2 = 0$, so kann man $u_s \equiv 0$ wählen und u ist genau dann eine Lösung von (4.4)-(4.6), wenn $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ und

$$\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dieses Gleichungssystem hat wiederum genau dann die eindeutige Lösung $c_1 = c_2 = 0$ (was $u \equiv 0$ entspricht), wenn (4.10) gilt. ■

Beispiele 4.19 1. Wir betrachten

$$u''(x) + u(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in [0, \pi] \quad (4.11)$$

mit den Randbedingungen

$$R_1 u := u(0) + u'(0) = \eta_1, \quad R_2 u := u(\pi) = \eta_2.$$

Dieses Randwertproblem besitzt für alle $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ und $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig eine eindeutige Lösung, da $u_1 := \cos, u_2 := \sin$ ein Fundamentalsystem von (4.11) und

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \cos & R_1 \sin \\ R_2 \cos & R_2 \sin \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Wählt man speziell $g(x) = 1$ für alle $x \in [0, \pi]$ und $\eta_1 = \eta_2 = 0$, so ist $u_s(x) = 1$ für alle $x \in [0, \pi]$ eine spezielle Lösung und die allgemeine Lösung von (4.11) ist

$$u(x) = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{für alle } x \in [0, \pi]$$

und aus

$$0 = R_1 u_1 = 1 + c_2 + c_1, \quad 0 = R_2 u_2 = 1 - c_1$$

folgt $c_1 = 1, c_2 = -2$. Somit ist die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = 1 + \cos x - 2 \sin x \quad \text{für alle } x \in [0, \pi].$$

2. Ändert man die Randbedingungen für (4.11) auf

$$R_1 u := u(0) = \eta_1, \quad R_2 := u(\pi) = \eta_2.$$

ab, so hat (4.4)-(4.6) nicht für alle $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung, da

$$\det \begin{pmatrix} R_1 \cos & R_1 \sin \\ R_2 \cos & R_2 \sin \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Wählt man z.B. $\eta_1 = \eta_2 = 0$, so ist $u(x) = c \sin x, x \in [0, \pi]$, für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung, die nicht eindeutig ist. Für $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ gibt es keine Lösung.

Im Fall von homogenen Randbedingungen lässt sich die Lösung wie folgt darstellen.

Satz 4.20 *Es seien $\eta_1 = \eta_2 = 0$ und es habe das homogene Randwertproblem (4.4)-(4.6) mit $g \equiv 0$ nur die triviale Lösung. Dann ist für alle stetigen $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung von (4.4)-(4.6) gegeben durch*

$$u(x) = \int_a^b \Gamma(x, y)g(y) dy \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

wobei Γ Greensche Funktion zu (4.4)-(4.6) heißt und durch

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{c}u_1(x)u_2(y) & \text{falls } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{1}{c}u_2(x)u_1(y) & \text{falls } a \leq y < x \leq b \end{cases}$$

mit $c = p(a)(u_1(a)u_2'(a) - u_1'(a)u_2(a))$ gegeben ist. Hierbei ist u_1, u_2 ein Fundamentalsystem von (4.4) mit

$$R_1u_1 = R_2u_2 = 0.$$

Beweis: Es seien u_1, u_2 Lösung von $Lu(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ mit

$$R_1u_1 = R_2u_2 = 0, \quad R_1u_2, R_2u_1 \neq 0.$$

(z.B. mit $R_1u_2 = R_2u_1 = 1$). Die Existenz von u_1, u_2 folgt aus Satz 4.18. Dann ist u_1, u_2 sind linear unabhängig und somit ein Fundamentalsystem.

Aus der Lagrange-Identität (4.7) folgt, dass

$$(p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)))' = u_2(x)(Lu_1)(x) - u_1(x)(Lu_2)(x) = 0$$

für alle $x \in [a, b]$. Somit ist

$$c := p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x))$$

unabhängig von $x \in [a, b]$. Außerdem ist $c \neq 0$ wegen Satz 4.16.2.

Nach Definition von u gilt

$$u(x) = \frac{u_2(x)}{c} \int_a^x u_1(y) dy + \frac{u_1(x)}{c} \int_x^b u_2(y) dy \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{u_2'(x)}{c} \int_a^x u_1(y)g(y) dy + \frac{u_2(x)u_1(x)}{c}g(x) + \frac{u_1'(x)}{c} \int_x^b u_2(y)g(y) dy - \frac{u_1(x)u_2(x)}{c}g(x) \\ &= \frac{u_2'(x)}{c} \int_a^x u_1(y)g(y) dy + \frac{u_1'(x)}{c} \int_x^b u_2(y)g(y) dy = \int_a^b \partial_x \Gamma(x, y)g(y) dy, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei $\partial_x \Gamma(x, y)$ für $x = y$ im Integral durch Null ersetzt wird, sowie

$$(p(x)u'(x))' = \frac{(p(x)u_2'(x))'}{c} \int_a^x u_1(y)g(y) dy + \frac{(p(x)u_1'(x))'}{c} \int_x^b u_2(y)g(y) dy + \underbrace{\frac{p(x)(u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x))}{c}}_{=1} g(x)$$

und schließlich

$$(Lu)(x) = \underbrace{\frac{(Lu_2)(x)}{c}}_{=0} \int_a^x u_1(y)g(y) dy + \underbrace{\frac{(Lu_1)(x)}{c}}_{=0} \int_x^b u_2(y)g(y) dy + g(x) = g(x)$$

für alle $x \in [a, b]$. Ähnlich erhält man

$$R_1 u = \frac{R_1 u_2(x)}{c} \underbrace{\int_a^a u_1(y)g(y) dy}_{=0} + \underbrace{\frac{R_1 u_1}{c}}_{=0} \int_a^b u_2(y)g(y) dy.$$

sowie $R_2 u = 0$. ■

Bemerkung 4.21 Es seien $Q = [a, b]^2$,

$$Q_1 = \{(x, y) \in Q : y \leq x\} \quad \text{und} \quad Q_2 = \{(x, y) \in Q : x \leq y\}.$$

Die Greensche Funktion Γ aus Satz 4.20 hat folgende Eigenschaften:

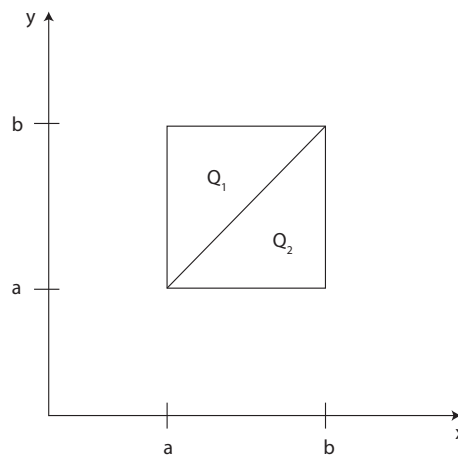


Abbildung 4.2: Skizze der Bereiche Q_1, Q_2

1. $\Gamma: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
2. In Q_1 und Q_2 existieren die partiellen Ableitung $\partial_x \Gamma, \partial_x^2 \Gamma$ und sind jeweils stetig in Q_1 und Q_2 .

3. Für jedes feste $y \in [a, b]$ gilt $(L\Gamma)(x, \xi) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ mit $x \neq y$, wobei L bzgl. x angewendet wird.
4. An der Diagonalen $\{(x, x) : x \in [a, b]\}$ macht $\partial_x \Gamma$ einen Sprung der Größe $\frac{1}{p}$, d.h.

$$\partial_x \Gamma(x+, x) - \partial_x \Gamma(x-, x) = \frac{1}{p(x)} \quad \text{für alle } x \in (a, b),$$

wobei $\partial_x \Gamma(x+, x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \partial_x \Gamma(x \pm h, x)$.

5. $R_1 \Gamma(\cdot, y) = R_2 \Gamma(\cdot, y) = 0$ für alle $y \in (a, b)$, wobei R_1, R_2 bzgl. x angewendet werden.

Man kann zeigen, dass Γ bereits durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt ist, siehe z.B. Walter "Gewöhnliche Differentialgleichungen", §26, Satz VII.

Beispiel 4.22 Für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} Lu(x) &:= u''(x) = f(x) && \text{für alle } x \in [0, 1] \\ R_1 u &:= u(0) = 0, && R_2 u := u(1) = 0 \end{aligned}$$

ist u_1, u_2 mit

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = x - 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1]$$

ein Fundamentalsystem mit $R_1 u_1 = u_1(0) = 0 = R_2 u_2 = u_2(1)$. Damit ist $c = 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = 1$ und

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} y(x-1) & \text{für alle } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ x(y-1) & \text{für alle } 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$$

die zugehörige Greensche Funktion, siehe Abbildung 4.3. Wählt man $f(x) = \sin x$ für alle $x \in [0, 1]$, so erhält man

$$\begin{aligned} u(x) &= (x-1) \int_0^x y \sin y \, dy + x \int_x^1 (y-1) \sin y \, dy \\ &= x \int_0^1 y \sin y \, dy - \int_0^x y \sin y \, dy - x \int_x^1 \sin y \, dy \\ &= x(\sin 1 - \cos 1) - \sin x + x \cos x + x(\cos 1 - \cos x) \\ &= x \sin 1 - \sin x \end{aligned}$$

da $x \sin x$ die Stammfunktion $\sin x - x \cos x$ hat.

4.3 Sturm-Liouville-Eigenwertprobleme

Es seien $p, q, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ wie in Annahme 4.13 und $r: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ stetig. Wir betrachten das sogenannte *Sturm-Liouville-(Eigenwert)-Problem* mit Gewichtsfunktion r

$$(Lu)(x) := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b) \quad (4.13)$$

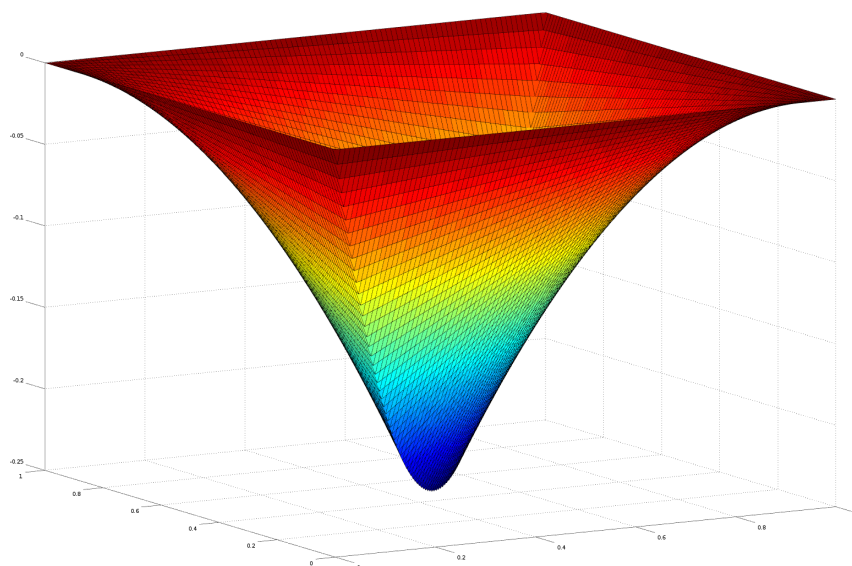


Abbildung 4.3: Greensche Funktion aus Beispiel 4.22

zusammen mit *Randbedingungen* der Form

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0, \quad (4.14)$$

$$R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = 0, \quad (4.15)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ gesucht ist, sodass (4.13)-(4.15) eine nicht-triviale Lösung $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ hat. Hierbei sei u zweimal stetig differenzierbar. Ein solches λ wird *Eigenwert* und u *Eigenfunktion* von L zur Gewichtsfunktion r .

Da $r(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist (4.13) äquivalent zu

$$\frac{1}{r(x)} (Lu)(x) = \lambda u(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Mit Hilfe der Symmetrie von L , siehe (4.8), erhalten wir:

Satz 4.23 *Es seien L, R_1, R_2, r wie zuvor. Dann gilt:*

1. *Alle Eigenwerte von L zur Gewichtsfunktion r sind reell und zu jedem Eigenwert λ gibt es eine reelle Eigenfunktion $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.*
2. *Alle Eigenwerte sind einfach, d.h. sind $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von (4.13)-(4.15), so sind u, v linear abhängig.*
3. *Sind u_1, u_2 Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 , so gilt*

$$(u_1, u_2)_r := \int_a^b u_1(x) \overline{u_2(x)} r(x) dx = 0,$$

d.h. u_1, u_2 sind orthogonal bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_r$.

Beweis:

Zu 1.: Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert und u eine zugehörige Eigenfunktion sowie $u_r(x) = \operatorname{Re} u(x)$, $u_i(x) = \operatorname{Im} u(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \int_a^b |u(x)|^2 r(x) dx &= \int_a^b \lambda r(x) u(x) \overline{u(x)} dx = \int_a^b \underbrace{Lu(x) \overline{u(x)}}_{=(Lu_r(x)+iLu_i(x))(u_r(x)-iu_i(x))} dx \\ &= \int_a^b u(x) \underbrace{\overline{Lu(x)}}_{=\overline{\lambda u(x)}} dx = \bar{\lambda} \int_a^b |u(x)|^2 r(x) dx \end{aligned}$$

wegen (4.8). Da u nicht konstant Null ist, $r(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt $\int_a^b |u(x)|^2 r(x) dx > 0$. Daraus folgt $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Ist nun $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Eigenfunktion und $u_r(x) = \operatorname{Re} u(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt aus (4.13)

$$\lambda r(x) u_r(x) = \operatorname{Re}(\lambda r(x) u(x)) = \operatorname{Re}(Lu(x)) = Lu_r(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

da $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in [a, b]$. D.h. u_r ist eine Eigenfunktion, sofern nicht $u_r(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Im letzten Fall gilt aber $u(x) \in i\mathbb{R}$ für alle $x \in [a, b]$ und $iu(x)$ ist eine reelle Eigenfunktion.

Zu 2.: Es seien u, v Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

Behauptung: $\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

Beweis: Falls $\alpha_2 = 0$, folgt aus $0 = R_1 u = \alpha_1 u(a) = R_1 v = \alpha_1 v(a)$, dass $u(a) = v(a) = 0$ und somit die Behauptung. Falls $\alpha_2 \neq 0$ erhält man wie im Beweis von (4.7), dass

$$u'(a) = \delta u(a), \quad v'(a) = \delta v(a) \quad \text{mit } \delta = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2 p(a)}.$$

D.h.

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(a) \\ \delta u(a) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(a) \\ \delta v(a) \end{pmatrix},$$

woraus wiederum die Behauptung folgt.

Aus der Behauptung folgt

$$\det \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0$$

und aus Satz 4.16.2 folgt, dass u, v linear abhängig sind.

Zu 3.: Es seien u_1, u_2 Eigenfunktionen zu Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann erhält man ähnlich wie zuvor

$$\begin{aligned} \lambda_1 \int_a^b u_1(x) \overline{u_2(x)} r(x) dx &= \int_a^b Lu_1(x) \overline{u_2(x)} dx = \int_a^b u_1(x) \underbrace{\overline{Lu_2(x)}}_{=\lambda_2 \overline{u_2(x)}} dx \\ &= \lambda_2 \int_a^b u_1(x) \overline{u_2(x)} r(x) dx \end{aligned}$$

da λ_1, λ_2 reell sind. Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$, folgt

$$\int_a^b u_1(x) \overline{u_2(x)} r(x) dx = 0.$$

■

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist:

Satz 4.24 *Es seien $p, q, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ wie in Annahme 4.13, $r: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ stetig und (4.4)-(4.6) mit $g \equiv 0, \eta_1 = \eta_2 = 0$ habe nur die triviale Lösung. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von einfach reellen Eigenwerten von L zur Gewichtsfunktion r und zugehörigen Eigenfunktionen $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} -\infty$$

und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von

$$\{u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ zweimal stetig differenzierbar mit } R_1 u = R_2 u = 0\}$$

bezüglich $(\cdot, \cdot)_r$ ist.

Beispiel: Wir haben schon gesehen, dass

$$\begin{aligned} u''(x) &= \lambda u(x) && \text{für alle } x \in [0, 1], \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

die Eigenwerte $\lambda_k = -(k\pi)^2, k \in \mathbb{N}$, hat und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $u_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ für alle $x \in [0, 1], k \in \mathbb{N}$, eine zugehörige Orthonormalbasis von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Auch in diesem Fall gilt $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} -\infty$.

Für den Beweis von Satz 4.24 benötigen wir:

Definition 4.25 *Es sei H ein Prä-Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und $K: H \rightarrow H$ eine lineare Abbildung. Dann heißt K kompakt, wenn es zu jeder beschränkte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, sodass $(K f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in H konvergiert.*

Bemerkung: Hierbei ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, falls $\|f_n\| = \sqrt{(f_n, f_n)}, n \in \mathbb{N}$, beschränkt ist und $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein f in H , wenn

$$\|f_{n_k} - f\| \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0.$$

Satz 4.26 (Spektralsatz für selbstadjungierte, kompakte Operatoren)

Es sei H ein Prä-Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und $K: H \rightarrow H$ eine kompakte lineare Abbildung, die symmetrisch (bzw. selbstadjungiert) ist, d.h.

$$(Kf, g) = (f, Kg) \quad \text{für alle } f, g \in H.$$

Außerdem sei $K(H)$ unendlich dimensional. Dann gibt es eine Folge $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen und eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $K(H)$ mit $\mu_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ und

$$Kf = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (f, e_k) e_k \quad \text{für alle } f \in H.$$

Insbesondere sind e_k Eigenfunktionen von K zum Eigenwert μ_k (d.h. $Ke_k = \mu_k e_k$) für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Hierbei ist $K(H) = \{Kf : f \in H\} \subseteq H$ ein Untervektorraum, der mit (\cdot, \cdot) wieder zu einem Prä-Hilbertraum wird.

Satz 4.26 wird in Abschnitt 4.4 bewiesen.

Es sei Γ die Greensche Funktion von L . Wir wenden Satz 4.26 nicht direkt auf L an, sondern auf $K: H \rightarrow H$ mit $H = C([a, b]; \mathbb{R})$, dem Skalarprodukt

$$(f, g)_r = \int_a^b f(x)g(x)r(x) dx \quad \text{für alle } f, g \in H$$

und

$$Kg(x) = \int_a^b \Gamma(x, y)r(y)g(y) dy \quad \text{für alle } g \in H.$$

Da (4.4)-(4.6) für alle $g \in H$ eine eindeutige Lösung hat, ist 0 kein Eigenwert von K . K ist also die Inverse von L (mit Randbedingungen $R_1u = R_2u = 0$).

Für $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

Lemma 4.27 *Es sei $g \in H$ beliebig und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. μ ist genau dann Eigenwert von K mit Eigenfunktion $g \in H$, wenn $\frac{1}{\mu}$ ein Eigenwert von L zur Eigenfunktion $u := Kg$ ist.*

Beweis: Es sei $g \in H$ beliebig und $u := Kg$. Dann löst u

$$Lu(x) = r(x)g(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

und $R_1u = R_2u = 0$. Somit ist $\mu g = Kg$ äquivalent zu $g = \mu^{-1}u$ bzw.

$$Lu(x) = \mu^{-1}r(x)u(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

mit $R_1u = R_2u$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Um Satz 4.26 anwenden zu können, benötigen wir noch:

Lemma 4.28 1. K ist symmetrisch bezüglich $(\cdot, \cdot)_r$.

2. $K: H \rightarrow H$ ist kompakt.

Beweis: Zu 1.: Zunächst folgt aus der Definition von Γ sofort die Symmetrie $\Gamma(x, y) = \Gamma(y, x)$ für alle $x, y \in [a, b]$. Mit Hilfe vom Satz von Fubini erhalten wir nun für alle $f, g \in H = C([a, b]; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (Kf, g)_r &= \int_a^b r(x) \int_a^b \underbrace{\Gamma(x, y)}_{=\Gamma(y, x)} r(y) f(y) dy g(x) dx \\ &= \int_a^b r(y) f(y) \underbrace{\int_a^b \Gamma(y, x) r(x) g(x) dx}_{=(Kg)(y)} dy = (f, Kg)_r \end{aligned}$$

Zu 2.: Es sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H = C([a, b]; \mathbb{R})$, d.h. es gibt ein $R > 0$, sodass

$$\|g_n\|_r := \sqrt{(g_n, g_n)_r} \leq R \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei $u_n := Kg_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus (4.12) folgt, dass

$$u'_n(x) = \int_a^b \partial_x \Gamma(x, y) r(y) g_n(y) dy \quad \text{für alle } x \in [a, b], n \in \mathbb{N},$$

wobei $\partial_x \Gamma(x, y)$ in Q_1 und Q_2 stetig und beschränkt ist, z.B. durch eine Konstante $M > 0$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |u'_n(x)| &\leq \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b \underbrace{|\partial_x \Gamma(x, y)|}_{\leq M} |g_n(y)| r(y) dy \\ &\leq \left(\int_a^b M^2 r(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \|g_n\|_r \leq \left(\int_a^b M^2 r(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} R =: \tilde{M} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Genauso erhält man

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |u_n(x)| &\leq \sup_{x \in [a, b]} \int_a^b \underbrace{|\Gamma(x, y)|}_{\leq M} |g_n(y)| r(y) dy \\ &\leq \left(\int_a^b M^2 r(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} R =: \tilde{M} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

für eine geeignete Konstante $M > 0$. Die Existenz einer Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion u konvergiert, folgt nun aus dem nachfolgenden Lemma. \blacksquare

Lemma 4.29 *Es seien $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig differenzierbare Funktionen, sodass es ein $M > 0$ gibt mit*

$$\sup_{x \in [a, b]} |u_n(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |u'_n(x)| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert,

Bemerkung: Die Bedingung (4.16) kann nicht durch die Bedingung

$$\sup_{x \in [a,b]} |u_n(x)| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

abgeschwächt werden, wie man an folgendem Beispiel sieht: Betrachtet man z.B. $u_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u_n(x) = x^n$ für alle $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

für alle $x \in [0, 1]$, siehe Abbildung 4.4. u_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen u , da

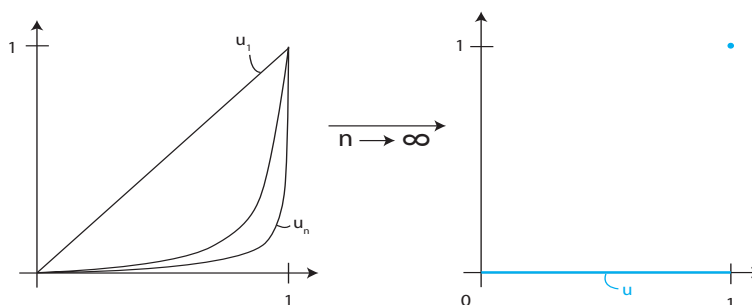


Abbildung 4.4:

$$\sup_{x \in [0,1]} |u_n(x) - u(x)| = 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Damit kann es auch keine gleichmäßig konvergente Teilfolge geben, da der Grenzwert immer u sein muss. In diesem Fall ist

$$\sup_{x \in [0,1]} |u_n(x)| = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

aber

$$\sup_{x \in [0,1]} |u'_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |nx^{n-1}| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

also ist (4.16) auch nicht erfüllt.

Beweis von Lemma 4.29: Wir zeigen, dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ *gleichgradig stetig* ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$|u_n(x) - u_n(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x, y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta. \quad (4.17)$$

Dann folgt die Existenz einer Teilfolge u_{n_k} die gleichmäßig gegen ein $u \in H$ konvergiert aus dem sogenannten Satz von Arzela-Ascoli, siehe z.B. Walter: "Gewöhnliche Differentialgleichungen", §7, Satz IV. Daraus folgt dann auch

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_r &= \left(\int_a^b \underbrace{|u_n(x) - u(x)|^2}_{\leq \sup_{y \in [a,b]} |u_n(y) - u(y)|^2} r(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_a^b r(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{y \in [a,b]} |u_n(y) - u(y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Es bleibt also (4.17) zu zeigen. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta := \frac{\varepsilon}{\tilde{M}}$ dann folgt für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n(y) - u_n(x)| \leq \int_x^y |u_n'(t)| dt \leq \tilde{M}|x - y| < \tilde{M}\delta = \varepsilon,$$

wobei wir o.B.d.A. angenommen haben, dass $x \leq y$. Somit ist (4.17) gezeigt. \blacksquare

Beweis von Satz 4.24: Es sei $K: H \rightarrow H$ wie oben definiert. Dann ist $K(H)$ nicht endlich dimensional, da sonst $H = C([a, b]; \mathbb{R})$ nicht endlich dimensional wäre, weil $K: H \rightarrow K(H)$ bijektiv ist. (Dabei ist $C([a, b]; \mathbb{R})$ nicht endlich dimensional da z.B. $f_k, k \in \mathbb{N}$, mit $f_k(x) = x^k$ für alle $x \in [a, b]$ linear unabhängig sind.)

Wegen Lemma 4.28 können wir nun Satz 4.26 auf K anwenden und erhalten eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bzgl. $(\cdot, \cdot)_r$ von $K(H)$ von Eigenvektoren e_k zu Eigenwerten μ_k , wobei $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$. Wir definieren nun

$$u_k := \frac{K e_k}{\|K e_k\|_r} = \frac{\mu_k}{|\mu_k|} e_k, \quad \lambda_k := \frac{1}{\mu_k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wegen Lemma 4.27 sind u_k Eigenfunktionen von L zu den Eigenwerten λ_k . Wegen Satz 4.23 sind $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$ einfache Eigenwerte, die paarweise verschieden sind. Außerdem folgt, dass $|\lambda_k| \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$, da $|\mu_k| \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$. Deswegen reicht es für $\lambda_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} -\infty$ zu zeigen, dass es ein $M > 0$ gibt mit

$$\lambda_k \leq M \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Im Fall von Dirichlet-Randbedingungen, d.h. $R_1 u = u(a), R_2 u = u(b)$, gilt

$$\lambda_k \leq \sup_{x \in [a, b]} q(x),$$

siehe 10. Übungsblatt, Aufgabe 4 (iv). Dabei sei bemerkt, dass in der Aufgabe $q(x) \leq 0$ vorausgesetzt wird. Für den verwendeten Aufgabenteil wird diese Voraussetzung aber nicht benötigt. Einen Beweis für den allgemeinen Fall findet man z.B. im Buch von Renardy und Rogers: "An Introduction to Partial Differential Equations", Theorem 7.96. \blacksquare

4.4 Beweis vom Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren

Im Folgenden sei H ein Prä-Hilbertraum. Für den Beweis benötigen wir:

Lemma 4.30 *Ist $K: H \rightarrow H$ linear und kompakt, so ist H beschränkt, d.h.*

$$\|K\| := \sup_{f \in H \setminus \{0\}} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} < \infty.$$

Bemerkung: $\|K\|$ wird *Operatornorm von K* genannt. Aus der Definition folgt sofort

$$\|Kf\| \leq \|K\| \|f\| \quad \text{für alle } f \in H. \quad (4.18)$$

Beweis von Lemma 4.30: Wir nehmen an, dass $\|K\| = \infty$ gilt. Dann gibt es eine Folge $f_n \in H \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{\|Kf_n\|}{\|f_n\|} \geq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Durch Normierung von f_n können wir $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erreichen. Insbesondere ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sodass

$$Kf_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \quad \text{in } H$$

für ein $u \in H$. Dies ist ein Widerspruch zu

$$\|Kf_{n_k}\| \geq n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty,$$

da konvergente Folgen beschränkt sind. ■

Lemma 4.31 *Ist $K: H \rightarrow H$ selbstadjungiert, so gilt*

$$\|K\| = \sup_{f \in H, \|f\|=1} |(Kf, f)| =: \rho(K).$$

Beweis: Zunächst gilt für alle $f \in H$ mit $\|f\| = 1$ wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(Kf, f)| \leq \|Kf\| \|f\| \leq \|K\| \|f\|^2 = \|K\|.$$

Daraus folgt $\rho(K) \leq \|K\|$. Um $\|K\| \leq \rho(K)$ zu zeigen, zeigen wir

$$\|Kf\| \leq \rho(K) \|f\| \quad \text{für alle } f \in H. \quad (4.19)$$

Dabei reicht es den Fall $Kf \neq 0$ zu betrachten, da die Aussage sonst trivial ist. Wir nutzen, dass

$$\begin{aligned} (K(v+w), v+w) - (K(v-w), v-w) &= (Kv, v) + (Kv, w) + \underbrace{(Kw, v)}_{=(w, Kv)} + (Kw, w) \\ &\quad - (Kv, v) + (Kv, w) + \underbrace{(Kw, v)}_{=(Kv, w)} - (Kw, w) = 4 \operatorname{Re}(Kv, w). \end{aligned}$$

für alle $v, w \in H$ sowie

$$(Ku, u) = \left(K \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right) \|u\|^2 \leq \rho(K) \|u\|^2$$

für alle $u \in H \setminus \{0\}$. Daraus folgt

$$4 \operatorname{Re}(Kv, w) \leq \rho(K) (\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2) = 2\rho(K) (\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Wählt man nun $v = \alpha^{-1}f$, $w = \alpha Kf$ mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{\|f\|}{\|Kf\|}}$$

erhält man

$$4\|Kf\|^2 = 4(Kv, w) \leq 2\rho(K) (\alpha^{-2}\|f\|^2 + \alpha^2\|Kf\|^2) = 4\|f\|\|Kf\|.$$

Daraus folgt (4.19). ■

Beweis von Satz 4.26:

1. Schritt: Existenz eines Eigenwertes: Wegen Lemma 4.28 ist

$$\|K\| = \sup_{f \in H, \|f\|=1} |(Kf, f)| = \rho(K).$$

Deswegen gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ mit $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$|(Kf_n, f_n)| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \rho(K) = \|K\|.$$

Da K kompakt und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie (Kf_n, f_n) beschränkt sind, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge, die wir wieder mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, außerdem erreichen, dass

$$Kf_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} u \quad \text{und} \quad (Kf_n, f_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \mu$$

gilt. Dann gilt notwendigerweise $|\mu| = \|K\|$. Dabei ist $\|K\| > 0$, da sonst $Kf = 0$ für alle $f \in H$ gelten würde und somit $K(H) = \{0\}$ nicht unendlich dimensional wäre.

Behauptung: μ ist ein Eigenwert von K mit Eigenfunktion/-vector $f := \mu^{-1}u$, wobei $\|f\| = 1$.

Beweis: Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \|Kf_n - \mu f_n\|^2 &= (Kf_n - \mu f_n, Kf_n - \mu f_n) = \|Kf_n\|^2 - 2\mu \underbrace{\operatorname{Re}(Kf_n, f_n)}_{=(Kf_n, f_n)} + \mu^2 \|f_n\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 - 2\mu(Kf_n, f_n) + \|K\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 2\|K\|^2 - 2\mu^2 = 0, \end{aligned}$$

da $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $Kf_n - \mu f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Daraus folgt

$$\mu f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} u \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad f_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} f := \frac{u}{\mu}$$

sowie $\|f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 1$ und

$$\|Kf_n - Kf\| \leq \|K\| \|f_n - f\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dies zeigt die Behauptung:

$$Kf = \lim_{n \rightarrow \infty} Kf_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu f_n = \mu f.$$

2. Schritt: Existenz einer Folge von Eigenwerten-/funktionen:

Es sei $\mu_1 := \mu$, $f_1 := f$, wobei μ, f wie zuvor seien. Wir betrachten nun $K: H_1 \rightarrow H_1$ mit

$$H_1 = \{f \in H : (f, f_1) = 0\},$$

dabei ist $Kf \in H_1$ für alle $f \in H_1$, da

$$(Kf, f_1) = (f, Kf_1) = \mu_1(f, f_1) = 0.$$

Wendet man nun den ersten Schritt auf $K: H_1 \rightarrow H_1$ statt $K: H \rightarrow H$, erhält man einen Eigenwert $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit zugehöriger Eigenfunktion $f_2 \in H_1$, $\|f_2\| = 1$, sodass

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| = \sup_{f \in H_1, \|f\|=1} |(Kf, f)| = \sup_{f \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} =: \|K\|_{H_1}.$$

Da $(f_1, f_2) = 0$, sind f_1 und f_2 linear unabhängig. Wir setzen nun $H_2 = \{f \in H : (f, f_1) = (f, f_2) = 0\}$. Iteriert man nun dieses Argument erhält man ein Orthonormalsystem $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Eigenfunktionen zu Eigenwerten $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$|\mu_{n-1}| \geq |\mu_n| = \sup_{f \in H_n, \|f\|=1} |(Kf, f)| = \sup_{f \in H_n \setminus \{0\}} \frac{\|Kf\|}{\|f\|} =: \|K\|_{H_n},$$

wobei

$$H_n = \{f \in H : (f, f_1) = \dots = (f, f_n) = 0\}.$$

Da $K(H)$ unendlich dimensional ist, gilt $K|_{H_n} \neq 0$ und $|\mu_n| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Schritt: $|\mu_n| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$:

Wir nehmen an, dass $|\mu_n|$ nicht gegen Null konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_{k \rightarrow \infty}$, sodass $\mu_{n_k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \mu \neq 0$. Dann ist aber die Folge $g_{n_k} := \frac{f_{n_k}}{\mu_{n_k}}$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkt bezüglich der Norm von H . Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge, die wir wieder mit $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnen, sodass

$$Kg_{n_k} = f_{n_k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} u \quad \text{in } H.$$

Dies kann aber nicht sein, da aus der Orthogonalität der $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt, dass

$$\|f_{n_k} - f_{n_l}\|^2 = \|f_{n_k}\|^2 + 2(f_{n_k}, f_{n_l}) + \|f_{n_l}\|^2 = 2$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$, und somit $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist.

4. Schritt: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis von $K(H)$:

Sei nun $f \in H$ beliebig und

$$g_n := f - \sum_{k=1}^n (f, f_k) f_k.$$

Dann gilt $g_n \in H_{n+1}$ und

$$\|g_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |(f, f_k)|^2 \leq \|f\|^2$$

wegen der Besselschen Ungleichung, siehe auch Abbildung 4.5.

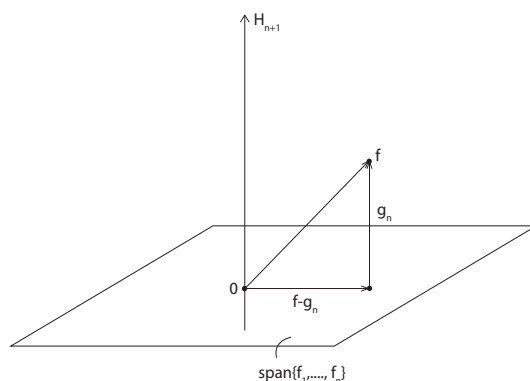


Abbildung 4.5: Skizze für g_n , f und $f - g_n = \sum_{k=1}^n (f, f_k) f_k$.

Außerdem folgt aus der Definition von μ_{n+1}

$$\|K g_n\| \leq \|K\|_{H_{n+1}} \|g_n\| = |\mu_{n+1}| \|g_n\| \leq |\mu_{n+1}| \|f\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Daraus folgt

$$K f - \sum_{k=1}^n (f, f_k) \underbrace{K f_k}_{=\mu_k f_k} = K g_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h.

$$K f = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (f, f_k) f_k \quad \text{für alle } f \in H.$$

Daraus folgt, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $K(H)$ ist und die behauptete Identität im Satz. \blacksquare

Bemerkung 4.32 Falls $N := \dim K(H)$ endlich ist, so gilt die Aussage von Satz 4.26 noch in folgendem Sinn: Es gibt reelle Zahlen $(\mu_k)_{k=1, \dots, N}$ und eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k=1, \dots, N}$ von $K(H)$ und

$$K f = \sum_{k=1}^N \mu_k (f, e_k) e_k \quad \text{für alle } f \in H.$$

Im 2. Schritt des vorangehenden Beweises ist dann $K|_{H_N} \equiv 0$ und das Verfahren endet nach N Schritten.

Beispiel 4.33 Inhomogene schwingende Saite

Betrachtet man eine schwingende Saite wie in Abschnitt 3.1 im Fall, dass das Material der Saite *inhomogen* ist, d.h. die Materialeigenschaften wie die Dichte und die Elastizitätskonstanten hängen von der Position $x \in [0, 1]$ ab, so erhält man eine verallgemeinerte eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) = \partial_x (c^2(x) \partial_x u(x, t)) \quad \text{für alle } x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}$$

mit der Rand- und Anfangsbedingungen (3.2)-(3.4) wie zuvor, wobei $c: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ eine gegebene Funktion ist. Der gleiche Separationsansatz $u(x, t) = g(t)f(x)$ liefert die Differential-/Eigenwertgleichung

$$(c(x)^2 f'(x))' = \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, 1),$$

mit den Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$. g löst wiederum (3.7). Ist c stetig, so liefert Satz 4.24 eine Orthonormalbasis von Eigenfunktionen $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Mit Hilfe vom Reihenansatz (3.22) erhält man dann die allgemeine Lösung, wobei $\mu_k = \sqrt{-\lambda_k}$. Dabei gilt $\lambda_k < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da

$$\lambda_k = \lambda_k \int_0^1 v_k(x)^2 dx = \int_0^1 (c(x)^2 v_k'(x))' v_k(x) dx = - \int_0^1 \underbrace{c(x)^2}_{>0} \underbrace{v_k'(x)^2}_{\neq 0} dx < 0.$$

Hierbei ist v_k' nicht konstant Null, da sonst $v_k \equiv 0$ gelten würde wegen $v_k(0) = v_k(1) = 0$.

4.5 Singuläre Randwertprobleme

Leider lassen sich die vorangehenden Resultate auf verschiedene Randwertprobleme, die in natürlicher Weise aus Separationsansätzen kommen nicht anwenden. Dies gilt z.B. für Randwertprobleme, die zur sogenannten *Besselschen Differentialgleichung*

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - m^2) u(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, b),$$

wobei $m \in \mathbb{N}_0$, $b > 0$. Diese Gleichung entsteht beim Separationsansatz für die schwingende kreisrunde Membran, vgl. (3.26) mit $\nu = 1$. (Der allgemeine Fall von (3.26) kann mit Hilfe einer Substitution $x = \nu r$ auf diesen Fall zurück geführt werden.) Dabei ist Annahme 4.13 nicht erfüllt, da $p(x) = x^2 = 0$ für $x = 0$. Viele der vorangehenden Resultate lassen sich auf solche *singulären Randwertprobleme* unter geeigneten Annahme übertragen. Häufig müssen aber die Randbedingungen für $x = a$ und $x = b$ durch die Existenz von geeigneten Grenzwerten ersetzt werden. Mehr Informationen dazu findet man z.B. im Buch von Walter: "Gewöhnliche Differentialgleichungen", §27, Abschnitt XX oder Goldhorn & Heinz: "Mathematik für Physiker 3", Abschnitt 31.6.

In vielen relevanten Fällen kann man solche singulären Differentialgleichungen effizient mit Hilfe von Funktionentheorie und einem Potenzreihenansatz lösen. Diesen Zugang wollen wir Im Folgenden verfolgen.

4.6 Regulär singuläre gewöhnliche Differentialgleichungen

Im Folgenden studieren wir die *singuläre* lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) + \frac{a(x)}{x} y'(x) + \frac{b(x)}{x^2} y(x) = 0 \quad \text{für } x \in (0, R), \quad (4.20)$$

wobei $R > 0$ und $a: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$, $b: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ analytische Funktionen seien mit

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{für alle } x \in (-R, R), \quad (4.21)$$

wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Unter diesen Voraussetzungen heißt 0 ein *regulärer singulärer Punkt* der Differentialgleichung (4.20).

Die folgende Methode zum Lösen solcher Differentialgleichungen geht auf *Frobenius* zurück. Setzt man (4.21) in (4.20) erhält man

$$y''(x) + \left(\frac{a_0}{x} + a_1 + a_2 x + \dots \right) y'(x) + \left(\frac{b_0}{x^2} + \frac{b_1}{x} + b_2 + \dots \right) y(x) = 0$$

Für x nahe 0 sind jeweils die Terme mit den höchsten negativen Potenzen, d.h.

$$\frac{a(x)}{x} \approx \frac{a_0}{x} \quad \text{und} \quad \frac{b(x)}{x^2} \approx \frac{b_0}{x^2},$$

dominierend. Dies legt nahe, dass sich Lösungen y von (4.20) nahe 0 ähnlich wie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + \frac{a_0}{x} y'(x) + \frac{b_0}{x^2} y(x) = 0 \quad (4.22)$$

bzw.

$$x^2 y''(x) + a_0 x y'(x) + b_0 y(x) = 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Mit Hilfe der Substitution $u(t) = y(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, lässt sich diese Differentialgleichung auf

$$u''(t) + (a_0 - 1)u'(t) + b_0 u(t) = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \quad (4.23)$$

zurückführen. (Übung: Nachrechnen!) Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) := \lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.24)$$

Falls p zwei verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ hat, erhält man daraus die Fundamentalsystem $u_j(t) = e^{\lambda_j t}$, $t \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ von (4.23) bzw.

$$y_j(x) = u_j(\ln x) = e^{\lambda_j \ln x} = x^{\lambda_j} \quad \text{für } x > 0, j = 1, 2.$$

von (4.22). Im Folgenden sei $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$.

Um nun eine Lösung von (4.20) zu erhalten, macht man den *Ansatz*

$$y(x) = x^\lambda (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}, \quad x \in (0, R),$$

wobei angenommen wird, dass die Potenzreihe

$$w(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

für alle $x \in (-R, R)$ konvergiert. Wie im letzten Abschnitt ist dann der Konvergenzradius der Potenzreihe mindestens R , w ist beliebig oft differenzierbar und

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad w''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

für alle $x \in (-R, R)$. Deswegen ist auch $y(x) = x^\lambda w(x)$ für alle $x \in (0, R)$ beliebig oft differenzierbar mit

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} w(x) + x^\lambda w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{n+\lambda-1}$$

$$y''(x) = \lambda(\lambda-1) x^{\lambda-2} w(x) + 2\lambda x^\lambda w'(x) + x^\lambda w''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{n+\lambda-2}$$

für alle $x \in (0, R)$. Außerdem folgt aus der Cauchy-Produkt-Formel, dass

$$\begin{aligned} \frac{a(x)}{x} y'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^{n-k} (\lambda + k) c_k x^{\lambda+k-1} \\ &= x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_0(\lambda + n) c_n + a_1(\lambda + n - 1) c_{n-1} + \dots + a_n \lambda c_0) x^n \\ \frac{b(x)}{x^2} y(x) &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n b_{n-k} x^{n-k} c_k x^{\lambda+k} = x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0) x^n. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (4.20) ein erhält man

$$x^{\lambda-2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in (0, R), \quad (4.25)$$

wobei

$$\begin{aligned} 0 = d_n &:= c_n ((\lambda + n)(\lambda + n - 1) + a_0(\lambda + n) + b_0) \\ &\quad + c_{n-1} (a_1(\lambda + n - 1) + b_1) + \dots + c_0 (a_n \lambda + b_n) \end{aligned} \quad (4.26)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt

$$c_0(\lambda(\lambda - 1) + a_0\lambda + b_0) = 0 \quad (4.27)$$

sowie die Rekursionsgleichung

$$c_n = -\frac{c_{n-1} f_1(\lambda + n - 1) + \dots + c_0 f_n(\lambda)}{p(\lambda + n)}, \quad \text{falls } p(\lambda + n) \neq 0, \quad (4.28)$$

für $n \in \mathbb{N}$ (bei bekannten c_{n-1}, \dots, c_0), wobei wir die Abkürzung

$$p(m) := m(m - 1) + a_0 m + b_0, \quad f_k(m) := a_k m + b_k$$

für $m \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ benutzt haben.

Falls $c_0 = 0$, so folgt aus (4.28) folgt, dass $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall hätte man nur die triviale Lösung von (4.20) erhalten. Falls $c_0 \neq 0$, so folgt aus (4.27), dass

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0 = 0, \quad (4.29)$$

was gerade für

$$\lambda = \lambda_{1/2} = -\frac{a_0 - 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_0 - 1)^2 - 4b_0}$$

erfüllt ist. Nun wollen wir $c_n = c_n^{(i)}$ durch (4.28) mit $\lambda = \lambda_i$ bestimmen, wobei $c_0^{(i)} \neq 0$ beliebig gewählt werden können. Das ist genau dann möglich, wenn

$$p(\lambda_j + n) \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, j = 1, 2.$$

Da λ_1, λ_2 die beiden Nullstellen von p sind, ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}.$$

In diesem Fall erhalten wir

Satz 4.34 *Es seien a, b wie in (4.21) und (4.24) habe zwei verschiedene Nullstellen λ_1, λ_2 , sodass $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$. Dann hat (4.20) ein Fundamentalsystem der Form*

$$y_j(x) = x^{\lambda_j} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)} x^n, \quad x \in (0, R), j = 1, 2$$

wobei $c_0^{(j)} \neq 0$ beliebig sind und $c_n^{(j)}$, $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch (4.28) mit $c_0 = c_0^{(j)}$ bestimmt sind.

Beweis: Für den formalen Beweis verweisen wir auf Heuser “Gewöhnliche Differentialgleichungen”, §27. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Potenzreihe, die $y_j(x)$ definiert, für alle $x \in (0, R)$ konvergiert.

Beispiel 4.35 Wir betrachten die Besselsche Differentialgleichung mit Index n

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad \text{für } x > 0, \quad (4.30)$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben ist. Dann ist (4.30) von der Form (4.20) mit $a_0 = 1$, $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $b_0 = -n^2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ und $b_k = 0$ für alle $k \geq 3$. Dann folgt aus (4.28)

$$c_k = -\frac{1}{p(\lambda + k)} c_{k-2} \quad \text{für alle } k \geq 2,$$

$$c_1 = 0,$$

wobei $p(\lambda) = \lambda^2 - n^2 = (\lambda + n)(\lambda - n)$, da $f_1(m) = 0$, $f_2(m) = 1$, $f_k(m) = 0$, $k \geq 2$ für alle $m \in \mathbb{R}$. Dabei muss λ für

$$0 = p(\lambda) = (\lambda + n)(\lambda - n)$$

gelten, d.h. $\lambda = n$ oder $\lambda = -n$. Da wir an Lösungen interessiert sind, die für $x \rightarrow 0$ beschränkt sind, betrachten wir nur den Fall $\lambda = n$ im Folgenden. Da $c_1 = 0$, folgt aus der Rekursionsformel, $c_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k(2n+2k)}c_{2(k-1)} = -\frac{1}{4k(n+k)}c_{2(k-1)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Für $c_0 = \frac{1}{2^n n!}$ erhält man als Lösung von (4.30) die *Besselfunktion 1. Art vom Index n*

$$J_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

Mit Hilfe vom Quotientenkriterium zeigt man leicht, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Somit ist $J_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine analytische Funktion. Man kann zeigen, dass jede von $J_n(x)$ linear unabhängige Lösung von (4.30) in $x = 0$ nicht stetig ("singulär") ist. Außerdem gilt

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0.$$

5 Kugelfunktionen und weitere spezielle Funktionen

5.1 Separationsansatz in Kugelkoordinaten

Wir betrachten das sogenannte *Dirichlet-Problem* für die Laplace-Gleichung (oder auch Potential-Gleichung)

$$\Delta u = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \quad (5.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = a \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \quad (5.2)$$

wobei $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sei und $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sei. Diese Gleichung beschreibt Gleichgewichtszustände z.B. für die Wärmeverteilung einem durch Ω beschriebenen Körper, wobei $a: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist, die im Beispiel die Temperatur am Rande des Körpers beschreibt.

Im Folgenden betrachten wir den Fall einer dreidimensionalen Kugel

$$\Omega = B_R(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

für $R > 0$. Aufgrund der Symmetrie von Ω bietet sich die Verwendung von Kugelkoordinaten an:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (5.3)$$

wobei $r \in (0, R)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$. Dann löst $v: (0, R) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v(r, \varphi, \theta) = u(x, y, z)$ die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$$\partial_r(r^2 \partial_r v)(r, \varphi, \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta v)(r, \varphi, \theta) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \partial_\varphi^2 v(r, \varphi, \theta) = 0. \quad (5.4)$$

Um spezielle Lösungen zu erhalten machen wir den Separationsansatz

$$v(r, \varphi, \theta) = f(r)g(\varphi, \theta).$$

Dies liefert die Gleichung

$$\frac{\partial_r(r^2 f'(r))}{f(r)} = -\frac{1}{g(\varphi, \theta)} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta g)(\varphi, \theta) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \partial_\varphi^2 g(\varphi, \theta) \right),$$

da die linke Seite unabhängig von (φ, θ) und die rechte Seite unabhängig von r ist, sind beide Seiten gleich einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\partial_r(r^2 f'(r)) - \lambda f(r) = 0, \quad r \in (0, R), \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta g)(\varphi, \theta) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \partial_\varphi^2 g(\varphi, \theta) + \lambda g(\varphi, \theta) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]. \quad (5.6)$$

Dabei kann man $g: [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Funktion

$$\tilde{g}: \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

identifizieren, wobei

$$\tilde{g}(\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) = g(\varphi, \theta) \quad \text{für alle } \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)$$

und \mathbb{S}^2 die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 ist.

Definition 5.1 *Eine Kugelflächenfunktion ist eine Funktion $g: [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, welche zweimal stetig differenzierbar in $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ ist, (5.6) löst und für die die wie zuvor zugeordnete Funktion $\tilde{g}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.*

Im Folgenden werden wir alle Kugelflächenfunktionen bestimmen. Dazu verwenden wir einen zweiten Separationsansatz

$$g(\varphi, \theta) = h(\varphi)k(\theta)$$

in (5.6). Dies liefert

$$\frac{\sin \theta}{k(\theta)} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta k'(\theta)) + \lambda (\sin \theta)^2 = -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}$$

und somit

$$h''(\varphi) + \mu h(\varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (5.7)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta k'(\theta)) + [\lambda (\sin \theta)^2 - \mu] k(\theta) = 0, \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (5.8)$$

Damit die zugehörige Funktion $\tilde{g}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, muss außerdem

$$h(2\pi) = h(0), \quad h'(2\pi) = h'(0)$$

gelten. Dies ist für nicht-triviale Lösungen von (5.7) nur möglich, falls $\mu = m^2$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall sind alle möglichen Lösungen von (5.7) Linearkombinationen von

$$h_{\pm m}(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

vgl. Abschnitt 3.1. Nutzt man $\mu = m^2$, $m \in \mathbb{N}_0$ und verwendet man die Substitution

$$w = \cos \theta \in (-1, 1), \quad \text{falls } \theta \in (0, \pi),$$

so erhält man

$$\frac{d}{dw} [(1 - w^2)P'(w)] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1 - w^2} \right] P(w) = 0, \quad w \in (-1, 1), \quad (5.9)$$

wobei

$$(\sin \theta)^2 = 1 - w^2, \quad P(w) := k(\theta), \quad k'(\theta) = -\sin \theta P'(w)$$

genutzt wurde. Für $m = 0$ ist dies die Legendre-Differentialgleichung. Für allgemeines $m \in \mathbb{N}_0$ wird (5.9) zugeordnete Legendre Differentialgleichung genannt.

5.2 Zugeordneten Legendre-Funktionen

Wir betrachten die zugeordnete Legendre-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)u'(x)] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] u(x) = 0, \quad x \in (-1, 1). \quad (5.10)$$

Diese Differentialgleichung lässt wie folgt mit Hilfe der Legendre-Differentialgleichung

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0 \quad \text{für } x \in (-1, 1). \quad (5.11)$$

lösen: Ist y eine (beliebig oft differenzierbare) Lösung von (5.11) und $u: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = (1-x^2)^{m/2} y^{(m)}(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (5.12)$$

eine Lösung von (5.10).

Beweis: Indem man (5.11) m -mal differenziert, sieht man, dass $v(x) := y^{(m)}(x)$ die Differentialgleichung

$$(1-x^2)v''(x) - 2(m+1)xv'(x) + (\lambda - m^2 - m)v(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)$$

(Beweis: Per Induktion). Somit folgt

$$(1-x^2)u'(x) = (1-x^2)^{m/2+1}v'(x) - xm(1-x^2)^{m/2}v(x)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [(1-x^2)u'(x)] \\ &= (1-x^2)^{m/2+1}v''(x) - (2m+2)(1-x^2)^{m/2}xv'(x) - m(1+m - \frac{m}{1-x^2})u(x) \\ &= (1-x^2)^{m/2} ((1-x^2)v''(x) - 2(m+1)xv'(x) - (m^2+m)v(x)) + \frac{m^2}{1-x^2}u(x) \\ &= -\lambda(1-x^2)^{m/2}v(x) + \frac{m^2}{1-x^2}u(x) = - \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] u(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. D.h. u löst (5.10). Da wir an Lösungen, die stetig auf $[-1, 1]$ sind, interessiert sind, nehmen wir an, dass $\lambda = n(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, da dann eine nicht-triviale Lösung existiert, welches ein Polynom ist – das sogenannte Legendre-Polynom P_n , siehe Beispiel 2.52 in “Analysis II für Physiker”.

Der folgende Satz fasst wichtige Eigenschaften der zugeordneten Legendre-Funktionen zusammen:

Satz 5.2 1. Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ hat (5.10) mit $\lambda = n(n+1)$ die Lösungen

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x^2-1)^n] \quad (5.13)$$

P_n^m heißt zugeordnete Legendre-Funktion erster Art von Index n der Ordnung m .

2. Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ bilden $(P_n^m)_{n \in \mathbb{N}_0, n \geq m}$ ein Orthogonalsystem bzgl. des Standardskalarproduktes auf $H = C([-1, 1]; \mathbb{K})$. Genauer es gilt:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \delta_{nk} \quad \text{für alle } n, k \in \mathbb{N}_0, n, k \geq m,$$

wobei $\delta_{nk} = 1$ für $n = k$ und $\delta_{nk} = 0$ sonst.

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bilden $P_n^m, m = 0, \dots, n$ ein Orthogonalsystem bzgl. des Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_{-1}^1 \frac{f(x) \overline{g(x)}}{1-x^2} dx,$$

wobei $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen seien mit $f(\pm 1) = g(\pm 1) = 0$. D.h. es gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^m(x) P_n^l(x)}{1-x^2} dx = 0 \quad \text{für alle } m \neq l \text{ mit } |m|, |l| \leq n.$$

Beweis: Zu 1.: Folgt aus dem Vorangehenden.

Zu 2.: Es reicht den Fall $m \geq 1$ zu betrachten, da die Aussage im Fall $m = 0$ wegen $P_n^m = P_n$ schon bekannt ist. Es sei

$$(L_m u)(x) := \frac{d}{dx} ((1-x^2)u'(x)) - \frac{m^2}{1-x^2} u(x) \quad \text{für alle } x \in [-1, 1]$$

für $u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann folgt aus dem ersten Teil

$$(L_m P_n^m)(x) = -n(n+1)P_n^m(x) \quad \text{für alle } x \in [-1, 1], n \geq m.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} n(n+1) \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx &= - \int_{-1}^1 (L_m P_n^m)(x) P_k^m(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 P_n^m(x) (L_m P_k^m)(x) dx = k(k+1) \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx, \end{aligned}$$

wobei partielle Integration benutzt wurde. Falls $n \neq k$, folgt daraus die Aussage, da $n(n+1) \neq k(k+1)$. Im Fall $n = k$ kann man die Identität mit Hilfe von $(n+m)$ facher partieller Integration nachrechnen, siehe 13. Übungsblatt, Aufgabe 1.

Zu 3.: In diesem Fall definieren wir

$$(L_n u)(x) := \frac{d}{dx} ((1-x^2)u'(x)) + n(n+1)u(x) \quad \text{für alle } x \in [-1, 1]$$

für $u: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$(L_n P_n^m)(x) = \frac{m^2}{1-x^2} P_n^m(x) \quad \text{für alle } x \in [-1, 1], n \geq m$$

und erhält man in analoger Weise

$$\begin{aligned} m^2 \int_{-1}^1 \frac{P_n^m(x)P_n^l(x)}{1-x^2} dx &= \int_{-1}^1 (L_n P_n^m)(x)P_n^l(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 P_n^m(x)(L_n P_n^l)(x) dx = l^2 \int_{-1}^1 P_n^m(x)P_n^l(x) dx. \end{aligned}$$

Da $m^2 \neq l^2$, folgt daraus die Behauptung. ■

Bemerkungen:

1. Die Orthogonalitäten folgten daraus, dass P_n^m Eigenfunktionen eines (singulären) Sturm-Liouville Differentialoperators L_m bzw. L_n sind. Dabei war die Gewichtsfunktion $r(x) = 1$ bzw. $r(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
2. Man kann zeigen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ das Orthogonalsystem $(\frac{1}{\sqrt{a_{n,m}}} P_n^m)_{n \geq m}$ mit $a_{n,m} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$ vollständig in $H = C([-1, 1]; \mathbb{K})$ mit dem Standardskalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)} dx$$

ist. Insbesondere gilt

$$f = \sum_{n=m}^{\infty} c_{n,m} P_n^m$$

für alle Riemann-integrierbaren Funktionen $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, wobei die Reihe in H konvergiert und

$$c_{n,m} = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_{-1}^1 f(x)P_n^m(x) dx.$$

5.3 Kugelfunktionen

Aus den Resultaten des letzten Abschnitts folgt, dass die dritte Differentialgleichung aus dem Separationsansatz der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (5.8) die Lösungen

$$k(\theta) = P_n^m(\cos \theta), \quad \theta \in [0, \pi]$$

hat, falls $\lambda = n(n+1)$ und $\mu = m^2$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$. Dies liefert die Lösungen

$$g(\varphi, \theta) = P_n^m(\cos \theta)e^{\pm im\varphi}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

von (5.6). Deswegen definieren wir

Definition 5.3 Für $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq n$ heißen $Y_n^m: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$Y_n^m(\varphi, \theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{2n+1}{2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta)e^{im\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi],$$

normierte Kugelflächenfunktionen.

Die normierten Kugelflächenfunktionen spielen eine ähnliche Rolle für Funktionen, die auf der Sphäre \mathbb{S}^2 definiert sind, wie die trigonometrischen Monome $e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Dabei werden Funktionen auf \mathbb{S}^2 mit Hilfe von Kugelkoordinaten $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ beschrieben. Dies folgt aus dem folgenden Satz:

Satz 5.4 *Es sei*

$$H = \{f: [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \theta) \overline{g(\varphi, \theta)} \sin \theta \, d\varphi d\theta.$$

Dann ist $\{Y_n^m : n \in \mathbb{N}_0, |m| \leq n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H . Insbesondere gilt

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n^m(\varphi, \theta) \overline{Y_l^k(\varphi, \theta)} \sin \theta \, d\varphi d\theta = \delta_{nl} \delta_{mk} \quad (5.14)$$

für alle $n, l \in \mathbb{N}_0$, $|m| \leq n$, $|k| \leq l$ und für alle $f \in H$ gilt

$$f(\varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_n^m Y_n^m(\varphi, \theta),$$

wobei die Reihe in H konvergiert und

$$\gamma_n^m = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\varphi, \theta) \overline{Y_n^m(\varphi, \theta)} \sin \theta \, d\varphi d\theta.$$

Falls f stetig differenzierbar ist, konvergiert die Reihe gleichmäßig.

Beweis: Wir zeigen nur (5.14), da die Vollständigkeit zu aufwendig zu beweisen ist. Für das Folgende seien $c_{n,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{2n+1}{2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}$ und $n, l \in \mathbb{N}_0$, $|m| \leq n$, $|k| \leq l$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n^m(\varphi, \theta) \overline{Y_l^k(\varphi, \theta)} \sin \theta \, d\varphi d\theta \\ &= c_{n,m} c_{l,k} \int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) P_l^{|k|}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} \overline{e^{ik\varphi}} \, d\varphi}_{=2\pi \delta_{mk}} \end{aligned}$$

wegen der Definition von Y_n^m . Falls $m \neq k$, folgt daraus (5.14). Falls $m = k$, gilt

$$\int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \int_{-1}^1 P_n^{|m|}(w) P_l^{|m|}(w) \, dw = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \delta_{nl}$$

wegen Satz 5.2.2. Daraus folgt insgesamt (5.14) in dem Fall. ■

Bemerkung: Dabei beschreibt

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} a(\varphi, \theta) \sin \theta \, d\varphi d\theta$$

das Oberflächenintegral für \mathbb{S}^2 in Kugelkoordinaten.

5.4 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen kann man nun eine Darstellung der Lösung des Dirichlet-Problems (5.1)-(5.2) herleiten. Dazu müssen wir noch geeignete Lösungen von (5.5) bestimmen. Die allgemeine Lösung von (5.5) für $\lambda = n(n+1)$ ist

$$f(r) = ar^n + br^{-n-1}, \quad r > 0,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$. Da die Lösung u von (5.1) stetig in 0 sein soll, muss auch f stetig in 0 sein. Somit muss $b = 0$ gelten. Wir erhalten somit die speziellen Lösungen

$$v_{n,m}(r, \varphi, \phi) := r^n P_n^m(\cos \theta) e^{\pm im\varphi}, \quad r \in [0, R], \varphi \in [0, 2\pi), \phi \in [0, \pi]$$

von der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten (5.4). Die allgemeine Lösung erhält man nun wie zuvor durch den Reihenansatz

$$v(r, \varphi, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_n^m r^n Y_n^m(\varphi, \theta) \quad (5.15)$$

für geeignete Koeffizienten α_n^m . Um die Randbedingung (5.2) zu erfüllen entwickeln wir

$$\tilde{a}(\varphi, \phi) := a(R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \phi \in [0, \pi],$$

mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen, d.h. wir nutzen Satz 5.4 für $f = \tilde{a}$. Ein Koeffizientenvergleich mit (5.15) liefert die Bedingung $\alpha_n^m R^n = \gamma_n^m$ bzw.

$$\alpha_n^m = \frac{1}{R^n} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{a}(\varphi, \phi) \overline{Y_n^m(\varphi, \theta)} \sin \theta \, d\varphi d\theta.$$

Man kann nun zeigen:

Satz 5.5 *Ist a dreimal stetig differenzierbar, so hat (5.1)-(5.2) eine eindeutige Lösung u , welche in Kugelkoordinaten durch (5.15) gegeben ist.*

5.5 Exkurs: Orthogonalpolynome

Orthogonalsysteme von Polynome treten oft als Eigenfunktionen von Differentialoperatoren auf, die aus Separationsansätzen für partielle Differentialgleichungen in der Physik entstehen. Ein Beispiel sind die Legendre-Polynome $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, welche ein Orthogonalsystem in $H = C([-1, 1]; \mathbb{K})$ mit dem Standardskalarprodukt ist, und Eigenfunktionen vom Differentialoperator

$$Lu(x) = \frac{d}{dx}((1-x^2)y'(x))$$

sind.

Allgemeiner sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall $r: I \rightarrow (0, \infty)$ eine stetige "Gewichtsfunktion" und

$$H = \{f: I \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig} : |f(x)|^2 r(x) \text{ ist (uneigentlich) Riemann-integrierbar auf } I\},$$

wobei $\|f\|_r = \sqrt{(f, f)_r}$ und

$$(f, g)_r = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}r(x) dx \quad \text{für } f, g \in H,$$

wobei a und b die Intervallenden von I sind. Im Fall der Legendre-Polynome ist $I = [-1, 1]$, $r \equiv 1$. Weitere Beispiele sind:

Beispiele 5.6 1. **Laguerre-Polynome:** Dies sind nicht-triviale Lösungen L_n der Laguerre-Differentialgleichung

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0 \quad \text{für } x > 0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Sie sind gegeben durch

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n), \quad x \geq 0.$$

In diesem Fall ist $I = [0, \infty)$ und $r(x) = e^{-x}$ für alle $x \in [0, \infty)$. Sie sind Polynome vom Grad n und Eigenfunktionen des Differentialoperators

$$Ly(x) = \frac{d}{dx} (xe^{-x}y'(x))$$

mit Gewichtsfunktion $r(x)$ zum Eigenwert $-n$, d.h. es gilt $Ly(x) = -nr(x)y(x)$ für $y = L_n$.

2. **Hermite-Polynome:** Dies sind nicht-triviale Lösungen H_n der Hermite-Differentialgleichung

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$. Sie sind gegeben durch

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall ist $I = (-\infty, \infty)$ und $r(x) = e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sie sind Polynome vom Grad n und Eigenfunktionen des Differentialoperators

$$Ly(x) = \frac{d}{dx} (e^{-x^2}y'(x))$$

mit Gewichtsfunktion $r(x)$ zum Eigenwert $-2n$.

In beiden Fällen folgt die Orthogonalität aus den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 4.23.2. Mehr zu Hermite- und Laguerre-Polynomen findet mit z.B. in Goldhorn und Heinz: "Mathematik für Physiker 3" Abschnitt 31.B./C.

5.6 Besselfunktionen erster Art

Wie wir in Beispiel 4.35 gesehen haben ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Besselfunktion erster Art mit Index n

$$J_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung mit Index $n \in \mathbb{N}$

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad \text{für } x > 0.$$

Mit Hilfe dieser Funktionen werden wir die Lösungen der schwingenden kreisförmigen Membran, siehe Abschnitt 3.3, bestimmen können. Dazu benötigen wir aber einige Eigenschaften dieser Besselfunktionen.

Mit Hilfe der Definition (5.16) kann man direkt die folgenden Rekursionsformeln zeigen:

Satz 5.7 Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ (ggf. mit $x \neq 0$) gilt:

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x), \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad (5.18)$$

$$xJ'_n(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}(x), \quad (5.19)$$

$$xJ'_n(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}(x), \quad (5.20)$$

$$xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x) - xJ_{n-1}(x), \quad (5.21)$$

Beweis: (5.17) wird in Aufgabe 4 des 13. Übungsblattes gezeigt. Der Beweis von (5.18) ist ähnlich. (5.19) und (5.20) folgen direkt aus (5.17) bzw. (5.18) und der Produktregel. Schließlich folgt (5.21) aus Addition von (5.19) und (5.20). ■

Erzeugende Funktion und Integralformeln

Die sogenannte *erzeugende Funktion* stellt eine grundlegende Beziehung zwischen den Besselfunktionen erster Art her, aus denen sich wichtige weitere Identität herleiten lassen.

Satz 5.8 Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$w(x, z) := e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) (z^n + (-1)^n z^{-n}), \quad (5.22)$$

wobei die Reihe für alle $z \neq 0$ konvergiert.

Bemerkung 5.9 Da die Funktion $w(x, z)$ holomorph für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, hat sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Laurentreihen-Entwicklung

$$w(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) z^{-n}.$$

Da die Koeffizienten eindeutig sind, gilt gerade

$$a_n(x) = \begin{cases} J_n(x) & \text{falls } n \geq 0, \\ (-1)^n J_{-n}(x) & \text{falls } n < 0. \end{cases}$$

D.h. $J_n(x)$ sind die Koeffizienten der Laurentreihen-Entwicklung von $w(x, z)$ für $n \geq 0$.

Beweis von Satz 5.8: w heißt erzeugende Funktion der Besselfunktionen J_n , $n \in \mathbb{N}$. Aus der Definition der Exponentialfunktion als Potenzreihe und dem Cauchy-Produkt folgt

$$\begin{aligned} w(x, z) &= e^{\frac{x}{2}z} e^{-\frac{x}{2}z^{-1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} z^{-n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^n}{(n-k)!k!} z^{n-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^n}{(n-k)!k!} z^{n-2k}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution $m = n - 2k$ erhält man

$$w(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{(m+k)!k!} z^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=\max\{0, -m\}}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{(m+k)!k!}}_{=: I_m} z^m$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $I_m = J_m(x)$, falls $m \geq 0$, und

$$I_m = \sum_{k=-m}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{(m+k)!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{-m+2n} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}}{(-m+n)!n!} = (-1)^m J_{-m}(x).$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Wählt man in (5.22) $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ mit $\theta \in \mathbb{R}$, so erhält man wegen

$$z^n + (-1)^n z^{-n} = \begin{cases} 2 \cos(2k\theta) & \text{falls } n = 2k \text{ gerade ist,} \\ 2i \sin((2k-1)\theta) & \text{falls } n = 2k-1 \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

sowie

$$e^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} = e^{ix \sin \theta} = \cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta),$$

dass

$$\begin{aligned} &\cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta) \\ &= J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos(2k\theta) + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin((2k-1)\theta). \end{aligned}$$

Deswegen erhalten wir:

Folgerung 5.10 Für alle $x, \theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(x \sin \theta) &= J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_{2k}(x) \cos(2k\theta), \\ \sin(x \sin \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2J_{2k-1}(x) \sin((2k-1)\theta).\end{aligned}$$

Dabei sind für festes x die rechten Seiten in den obigen Gleichungen die Fourier-Reihen der geraden bzw. ungeraden Funktionen $[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto \cos(x \sin \theta)$ bzw. $[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto \sin(x \sin \theta)$. Aus der Eindeutigkeit der Fourier-Koeffizienten folgt

$$a_0 = J_0(x), \quad a_{2k} = 2J_{2k}(x), \quad b_{2k-1} = 2J_{2k-1}(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

wobei $a_k, k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k, k \in \mathbb{N}$ die Fourier-Koeffizienten in reeller Schreibweise sind. Aus der Formel für die Fourier-Koeffizienten (siehe z.B. (3.3)-(3.5) der "Analysis II für Physiker") und der Eigenschaft, dass die Funktionen bzgl. θ gerade bzw. ungerade sind, folgt somit:

Satz 5.11 Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}J_{2k}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2k\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \\ J_{2k-1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin((2k-1)\theta) \cos(x \sin \theta) d\theta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Nullstellen der Besselfunktionen erster Art

Die Besselfunktionen haben ein ähnliches Verhalten wie die trigonometrischen Funktionen. Einen Aspekt davon zeigt der folgende Satz:

Satz 5.12 Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Folge $0 < \alpha_{n,1} < \dots < \alpha_{n,k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$ mit $J_n(\alpha_{n,k}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: 1. Fall $n = 0$: Wegen Satz 5.11 gilt

$$\frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt,$$

wobei wir die Substitution $t = x \sin \theta$ verwendet haben. Es sei nun $c_0 := 0$ und $c_k := k\pi - \frac{\pi}{2}$ sowie

$$y_k(t) := \begin{cases} \frac{\cos t}{\sqrt{x^2 - t^2}} & \text{falls } t \in [0, c_k), \\ 0 & \text{falls } t \geq c_k \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $y_k: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Weiterhin sei

$$F_{j,k} = \int_{c_{j-1}}^{c_j} |y_k(t)| dt \quad \text{für } j = 1, \dots, k.$$

Dann gilt

$$F_1 < F_2 < \dots < F_k,$$

da $|\cos t|$ π -periodisch ist und $t \mapsto \sqrt{x^2 - t^2}$ für $t < c_k$ monoton fallend ist. Außerdem gilt

$$\cos t \begin{cases} > 0 & \text{für } t \in (c_{2j}, c_{2k+1}), \\ < 0 & \text{für } t \in (c_{2j+1}, c_{2k+2}). \end{cases}$$

Deswegen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} J_0(c_k) &= \int_0^{c_k} y_k(t) dt \\ &= \begin{cases} F_1 + (F_3 - F_2) + \dots + (F_k - F_{k-1}) > 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \\ -(F_2 - F_1) - (F_3 - F_4) + \dots - (F_k - F_{k-1}) < 0 & \text{falls } k \text{ gerade ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz muss es somit für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle $\alpha_{n,k} \in (c_k, c_{k+1})$ geben.

2. Fall $n \in \mathbb{N}$: Diesen Fall zeigt man per Induktion bezüglich $n \in \mathbb{N}_0$. Der Induktionsanfang ist der erste Fall. Sie nun die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen. Wir nutzen nun, dass

$$\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \text{für } x > 0.$$

Sei $f(x) = x^{-n} J_n(x)$ für all $x > 0$. Dann gilt $f(\alpha_{n,k}) = f(\alpha_{n,k+1}) = 0$ und nach dem Satz von Rolle gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\alpha_{n+1,k} \in (\alpha_{n,k}, \alpha_{n,k+1})$, sodass $f'(\alpha_{n+1,k}) = 0$. Aus obiger Identität folgt $J_{n+1}(\alpha_{n,k+1}) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgt die Aussage des Satzes. ■

Bemerkung: J_n lässt sich als Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = +\infty$ zu einer holomorphen Funktion auf \mathbb{C} fortsetzen. Nach dem sogenannten Identitätssatz der Funktionentheorie können sich die Nullstellen einer solchen Funktion in keinem Punkt in \mathbb{C} häufen. Daraus folgt, dass

$$\{x \in [0, N] : J_n(x) = 0\}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ endlich ist, da sonst nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ein Häufungspunkt von Nullstellen existieren würde. Somit gilt sogar

$$\{x \geq 0 : J_n(x) = 0\} = \{\alpha_{k,n} : k \in \mathbb{N}\}$$

für eine Folge $\alpha_{k,n}$ mit $\alpha_{k,n} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$.

Orthogonalsystem von Besselfunktionen erster Art

Der Separationsansatz für die kreisförmige schwingende Membran führte unter Anderem auf die Differentialgleichung

$$r^2 w''(r) + r w'(r) + (r^2 \mu^2 - m^2) w(r) = 0 \quad \text{für alle } r \in (0, R)$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $R > 0$, siehe (3.26). Diese Gleichung ist äquivalent zur Eigenwertgleichung

$$Lw(r) := \frac{d}{dr} (rw'(r)) - \frac{m^2}{r}w(r) = \mu^2rw(r), \quad r \in (0, R). \quad (5.23)$$

Außerdem gelte zusätzlich $w(R) = 0$, damit die Dirichlet-Randbedingung erfüllt ist. Dies wiederum ein singuläres Sturm-Liouville-Randwertproblem mit $p(r) = r$, $q(r) = -\frac{m^2}{r}$ und Gewichtsfunktion $\tilde{r}(r) = r$ für alle $r \in (0, R)$.

Mit Hilfe der Besselfunktionen erster Art lässt sich dieses Eigenwertproblem wie folgt lösen: Zunächst rechnet man leicht nach, dass $w(r) = J_m(\mu r)$

$$\begin{aligned} r^2w''(r) &= \mu^2r^2J_m''(\mu r) = (x^2J_m''(x))|_{x=\mu r}, \\ rw'(r) &= \mu rJ_m'(\mu r) = (xJ_m'(x))|_{x=\mu r}, \\ (r^2\mu^2 - m^2)w(r) &= (x^2 - m^2)J_m(x)|_{x=\mu r} \end{aligned}$$

gilt und somit (5.23) erfüllt ist. Andererseits muss die Randbedingung

$$0 = w(R) = J_m(\mu R)$$

erfüllt sein. Daraus folgt $\mu R = \alpha_{m,k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, wobei $\alpha_{m,k}$, $k \in \mathbb{N}$, die Nullstellen von J_m aus Satz 5.12 sind. Somit ist $\lambda = -\frac{\alpha_{m,k}^2}{R^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein Eigenwert von (5.23) mit Eigenfunktion

$$w_k(r) = J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{R}r\right), \quad r \in [0, R].$$

Daraus erhalten wir

Satz 5.13 Für alle $R > 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\{w_k : k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthogonalsystem von Eigenfunktionen des singulären Sturm-Liouville-Eigenwertproblems (5.23) mit $w(R) = 0$ bezüglich $H = C([0, R]; \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_r := \int_0^R r f(r) \overline{g(r)} dr \quad \text{für } f, g \in H.$$

Genauer gilt

$$\int_0^R r w_k(r) w_l(r) dr = \delta_{kl} \frac{R}{2} J_m'(\alpha_{m,k})^2. \quad (5.24)$$

Bemerkung: Man kann auch zeigen, dass $\{w_k : k \in \mathbb{N}\}$ nach Normierung ein vollständiges Orthonormalsystem ist und jedes $f \in C([0, R]; \mathbb{R})$ in eine *Fourier-Bessel-Reihe*

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^m J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{R}r\right), \quad r \in [0, R]$$

entwickeln lässt, wobei

$$c_k^m = \frac{2}{R^2 J_m'(\alpha_{m,k})} \int_0^R r f(r) J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{R}r\right) dr \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis von Satz 5.13: Die Orthogonalität $(w_k, w_l)_r = 0$ für $k \neq l$ zeigt man wie zuvor mit Hilfe der Eigenwertgleichung (5.23) und partieller Integration, vgl. Beweis von Satz 4.23, wobei die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden, da $w_k(R) = w_k(0) = 0$ und $r|_{r=0} = 0$. Es bleibt also nur (5.24) für $k = l$ zu zeigen. Dazu multiplizieren wir die Besselsche Differentialgleichung (4.30) mit $2x^2y'(x)$ und setzt $n = m$, erhält man nach einer kurzen Rechnung

$$\frac{d}{dx} [x^2(y'(x))^2 + (x^2 - m^2)y(x)^2] - 2xy(x)^2 = 0.$$

Für $y(x) = J_m(x)$ erhält man somit

$$2x(J_m(x))^2 = \frac{d}{dx} [x^2(J_m'(x))^2 + (x^2 - m^2)J_m(x)^2].$$

Integration bezüglich $x \in [0, R]$ liefert

$$2\lambda^2 \int_0^R r J_m(\lambda r)^2 dr = 2 \int_0^{\lambda R} x J_m(x)^2 dx = \lambda^2 R^2 J_m'(\lambda R)^2 - (\lambda^2 R^2 - m^2) J_m(\lambda R)^2 + m^2 J_m(0)^2,$$

wobei für $\lambda = \frac{\alpha_{n,k}}{R}$ der zweite Term verschwindet und der dritte Term verschwindet, da $J_m(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt (5.24) im Fall $n = m$. ■

5.7 Anwendung auf die Helmholtz-Gleichung und schwingende Membran

Es sei $\Omega = B_R(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ für $R > 0$. Der Separationsansatz der für die Wellengleichung in Abschnitt 3.3 führte auf die Helmholtz-Gleichung

$$\lambda v(x) - \Delta v(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{5.25}$$

wobei v zusätzlich die (Dirichlet-)Randbedingung

$$v(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega \tag{5.26}$$

erfüllt, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ noch unbestimmt ist. Gesucht sind Eigenwerte $\lambda = -\mu^2$, sodass diese Gleichungen eine nicht-triviale Lösung v hat. Ein weiterer Separationsansatz in Polarkoordinaten $v(x) = w(r)q(\varphi)$ führte auf

$$r^2 w''(r) + r w'(r) + (r^2 \mu^2 - m^2) w(r) = 0 \quad \text{für alle } r \in (0, R), \tag{5.27}$$

wobei $q_m(\varphi) = a_m \cos(m\varphi) + b_m \sin(m\varphi)$ und $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig ist. Mit Hilfe der Lösungen aus dem letzten Abschnitt erhalten wir für $\mu = \mu_k := \frac{\alpha_{m,k}}{R}$, $k \in \mathbb{N}$, die nicht-trivialen Lösungen

$$v_{m,k}(x) = (a_{m,k} \cos(m\varphi) + b_{m,k} \sin(m\varphi)) J_m\left(\frac{\alpha_{m,k}}{R} r\right), \quad x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$$

der Helmholtz-Gleichung (5.25) mit der Randbedingung (5.26), wobei $\lambda = -\frac{\alpha_{m,k}^2}{R^2}$ die Eigenwerte und $\frac{\alpha_{m,k}}{R}$ die zugehörigen Frequenzen der Schwingungen der Membran sind und $a_{m,k}, b_{m,k} \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

Für das Folgende betrachten wir die Lösungen in der kompakteren komplexen Form

$$v_{m,k}(x) = e^{im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right),$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Diese Lösungen der Helmholtz-Gleichung liefern die nicht-trivialen Lösungen

$$u_{m,k}(x, t) = (a_{m,k} \cos(c\mu_{k,m}t) + b_{m,k} \sin(c\mu_{k,m}t)) e^{im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right),$$

der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) = c\Delta u(x, t), \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

mit der Dirichlet-Randbedingung

$$u(x, t) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}.$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung erhält man nun als (abzählbar unendliche) Linearkombination dieser Lösung

$$u(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{m,k} \cos(c\mu_{k,m}t) + b_{m,k} \sin(c\mu_{k,m}t)) e^{im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right).$$

Die Koeffizienten $a_{m,k}, b_{m,k}$ bestimmt man wie bei der schwingenden Saite aus den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

sofern diese eine Reihenentwicklung der Form

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k,m} e^{im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right) \\ u_1(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,m} e^{im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right) \end{aligned}$$

besitzen. Ein Koeffizientenvergleich liefert die Bedingungen.

$$a_{m,k} = \beta_{m,k}, \quad b_{m,k} = \frac{\gamma_{k,m}}{c\mu_{k,m}} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}.$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen für $e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$, und $J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right)$, $k \in \mathbb{N}$, folgt

$$\begin{aligned} \beta_{m,k} &= \frac{1}{\pi R^2 J'_m(\alpha_{m,k})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R u_0(r, \varphi) e^{-im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right) r dr d\varphi, \\ \gamma_{m,k} &= \frac{1}{\pi R^2 J'_m(\alpha_{m,k})} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R u_1(r, \varphi) e^{-im\varphi} J_{|m|} \left(\frac{\alpha_{|m|,k}}{R} r \right) r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Für genügend oft stetig differenzierbare Anfangswerte u_0, u_1 kann man auch rigoros zeigen, dass die so definierte Funktion u auch wirklich die eindeutige Lösung der Wellengleichung zu den gegebenen Anfangswerten und der Dirichlet-Randbedingung ist. Siehe z.B. Goldhorn & Heinz, "Mathematik für Physiker 3", Satz 31.55.