Weihnachtsblatt

(Abgabe: 9.01.2020)

1 Mehrdimensionale Integration

Aufgabe 1.1. Berechnen Sie die folgenden Flächeninhalte:

i) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2xy < 5\}$,

ii) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Weiter berechnen Sie die Integrale:

iii) $\int_{M_1} x^3 e^y \, \mathrm{d}(x, y)$,

iv) $\int_{M_2} xy \, \mathrm{d}(x, y)$.

Aufgabe 1.2. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, zwei-dimensionale, differenzierbare und orientierbare Untermannigfaltigkeit mit C^1-Rand, weiter seien die Funktionen $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gegeben. Zeigen Sie die folgende Integralidentität:

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\nabla g(x) \cdot \mathrm{d}x \;=\; \int_{\Omega} (\nabla f(x) \times \nabla g(x)) \cdot \vartheta(x) \mathrm{d}S(x),$$

wobei $\vartheta(x)$ das zugehörige Einheitsnormalenfeld von Ω ist.

2 Funktionentheorie

Aufgabe 2.1. Entwickeln Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{(z-1)(z-2)} \end{aligned}$$

auf den angegebenen Ringgebieten in eine Laurentreihe:

i) $D_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$

ii) $D_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$

iii) $D_{2,\infty}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < \infty\}$

iv) $D_{0,1}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 1| < 1\}$

Aufgabe 2.2. Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|^n)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass f ein Polynom von Grad $\leq n$ ist.