Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

Blatt für die Übungen am 7./8. November 2022

Themen: Axiomensysteme

Aufgabe 3.3. Zeige, daß die Axiomensystem (G1')-(G2') und (G1)-(G2)-(G3) aus Beispiel 3.5 äquivalent sind.
Hinweis: *Zeige hierzu (unter Benutzung von (G1) beziehungsweise (G1')), daß (G2) und (G3) aus (G2') folgen und umgekehrt.*

Aufgabe 3.4. Betrachte folgendes Axiomensystem der Ebene und untersuche es auf Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit:

(E1) Geraden sind Mengen von Punkten.

(E2) Zwei voneinander verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

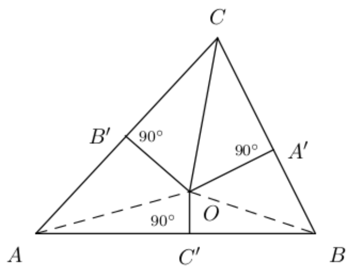
(E3) Durch jeden Punkt der Ebene gibt es zu jeder Geraden, die diesen Punkt nicht enthält, genau eine Gerade, die mit der gegebenen Gera- den keinen gemeinsamen Punkt hat.

(E4) Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält.

Hinweise: *Finde ein Modell, um die Widerspruchsfreiheit zu zeigen.*
Um die Unabhängigkeit zu widerlegen, zeige, daß (E2) aus den übrigen Axiomen folgt.
Formuliere eine Aussage, die nicht bewiesen werden kann, was zeigt, daß das System nicht vollständig ist.

Aufgabe 3.5. Euklid hatte versucht aus Beobachtungen (die wahrscheinlich oft auf Skizzen basierten), ein konsistentes System zu entwickeln. Diese Aufgabe zeit, daß es gefährlich ist, wenn man sich nur auf den Augenschein verläßt. Betrachte folgende Aussage und den Beweis dazu, wobei alles Wissen aus der Schulgeometrie verwendet werden darf. Arbeite den Beweis nahc, und finde den Fehler.
Behauptung: *Jedes Dreieck ist gleichschenklig.*

Beweis. Im Dreieck $\triangle ABC$ wird der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ACB$ mit der Mittelsenkrechten auf $[AB]$ konstruiert. Wir bezweichnen ihn mit O. Von O fällen wir ein Lot auf AC und BC.



Nun gilt

$$\overline{C'O} = \overline{C'O}, \qquad \overline{AC'} = \overline{C'B}, \qquad \sphericalangle AC'O = \sphericalangle OC'B = \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem SWS-Satz stimmen dann die Dreiecke überein, und $\overline{OA} = \overline{OB}$. Außerdem ist

$$\overline{CO} = \overline{CO}, \qquad \sphericalangle B'CO = \sphericalangle A'CO = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB, \qquad \sphericalangle CB'O = CA'O = \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem SWW-Satz ist also $\triangle CB'O = \triangle CA'O$ und somit

$$\overline{CB'} = \overline{CA'}, \qquad \overline{OB'} = \overline{OA'}.$$

Da außerdem $\sphericalangle OB'A = \sphericalangle OA'B = \frac{\pi}{2}$ und diese Winkel als rechte jeweils gegenüber der längeren Strecke $\overline{AO} = \overline{OB}$ sind, können wir den SSW-Satz anwenden und erhalten $\triangle OB'A = \triangle OA'B$. Insbesondere ist

$$\overline{AB'} = \overline{BA'}.$$

Da

$$\overline{AC} = \overline{AB'} + \overline{B'C}, \qquad \overline{BC} = \overline{BA'} + \overline{A'C}$$

folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$. **q.e.d.**

Wir werden die Aufgaben gemeinsam in der Übung lösen. Es ist jedoch hilfreich, wenn Sie sich vorher etwas dazu überlegen.