Elementargeometrie für Lehramt Realschule

Dr. Veronika Ertl-Bleimhofer

Wintersemester 2022/23

Zusammenfassung

Die Geometrie der euklidischen Ebene hat eine lange Tradition in der bildenden Kultur und wurde schon zur Zeit der Griechen genutzt um den Geist zu schärfen und das Denken und Debattieren zu üben. Bei der Geometrie ist es wie bei vielen anderen Fertigkeiten, wie Klavier spielen oder Radahren: Um sie sich wirklich anzueignen, genügt es nicht, sich theoretisches Wissen anzueignen, sondern man muß Geometrie betreiben. Dieses Skript ist als Unterstützung in der Vorlesung zur Elementargeometrie für das Selbststudium gedacht.

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik für das Leben?

Der Gegenstand dieser Vorlesung ist die Geometrie, einer der ältesten Zweige der Mathematik. Genauer werden wir uns mit der Geometrie der Ebene, und noch genauer mit der euklidischen Geometrie beschäftigen.

1.1 Die Ursprünge der Geometrie

Das Wort Geometrie kommt uas dem griechischen und bedeutet „Vermessung der Erde“. Ausgrabungen prähistorischer Kulturen erzählen schon eine frühe Geschichte der Geometrie. Auch die mit den ersten Hochkulturen entstehenden Schriftsprachen überliefern geometrisches Wissen aus Baukunst, Handwerk, Landwirtschaft und Astronomie. Die Mathematik erfüllte in solchen Kulturen, wie zum Beispiel der der Ägypter oder Babylonier oft einen praktischen Zweck: wieviele Steinblöcke muß man für die Pyramiden anfertigen, wie teilt man eine Ernte auf, wie groß ist ein Acker, wann kommt die nächste Nilüberschwemmung, wieviel Flüssigkeit paßt in ein Gefäß, wieviel Erde ergibt sich beim Auskoffern eines Bewässerungsgrabens, etc. Nur selten wurde der Versuch unternommen, die Mathematik zu begründen oder logisch herzuleiten.
Anders bei den Griechen. Das Messen von Längen, Flächen oder Winkeln interessiert die griechischen Mathematiker überhaupt nicht. Während es sich nicht sicher klären lässt, warum manche Griechen begannen, geometrische Aussagen zu hinterfragen, scheint es naheliegend zu sein, daß die griechische Philosophie- und Diskussionskultur eine entscheidende Rolle spielte. In Streitgesprächen wurden immer schärfere Maßstäbe entwickelt, immer mehr Aussagen wurden hinterfragt und man begann Argumente auf logische Fehler zu untersuchen. Diese konstruktive Skepsis machte auch vor der Mathematik nicht halt, die also Möglichkeit gesehen werden konnte, seinen Geist zu schärfen. Ihr zentrales Anliegen war also das geordnete Denken entlang festgelegter Schlußfolgerungsregeln, damit man dann irgendwann, nach mehreren Jahren, reif ist für das Studium der Philosophie.
Dies macht die griechische Geometrie so einzigartig im Vergleich zu anderen Kulturen. Wenn also die Kinder heute Schwierigkeiten haben, den Wert der mathematischen Logik zu erkennen, können wir uns trösten mit der Beobachtung, daß praktisch alle anderen Hochkulturen diesen auch nicht erkannten.

1.2 Erwartungen an den Mathematikunterricht

Da wir im Laufe unseres Lebens einen großen Teil unserer Zeit in Bildungseinrichtungen verbringen, sei es in der Schule, in der Ausbildung, im Studium, etc. scheint es angebracht zu erwarten, daß diese Zeit sinvoll verbracht werden sollte. Schüler, Studenten und Lernende im Allgemeinen sollten etas aus dieser Zeit mitnehmen, am besten etwas, das sie im Leben weiterbringt. Umgekehrt heißt das, daß wir als Lehrer und Dozenten den Unterricht bezihungsweise die Vorlesung so gestalten sollten, daß dies möglich ist, natürlich in einem gewissen Rahmen, der uns vom Lehrplan oder Studienplan vorgegeben wird.
Was kann man in dieser Hinsicht vom Mathematikunterricht oder Mathematikstudium erwarten? Wahrscheinlich zumindest die folgenden Punkte:

- *Wenn Sachinhalte vermittelt werden, sollten diese einen Wert haben.*
  Sachinhalte können unter anderem einen Wert haben, wenn sie für Anwendungen relevant sind (z.B. Prozentrechnen), wenn sie Werkzeuge für andere Wissenschaften bilden (z.B. Vektorrechnen für die Physik), oder wenn Vernetzungen mit anderen

Gebieten hergestellt werden (z.B. Bruchrechnen zur Musiktheorie). Elementargeometrie fällt selten in diese Kategorie.

- *Mathematik kann die Kunst des klaren Denkens schulen.*
  Das schließt die Fähigkeit ein auf begründete Weise Sinn und Unsinn zu unterscheiden, was in Verantwortungspositionen eine wünschenswerte Kompetenz darstellt. Ein wichtiger Aspekt der Mathematik ist es, Aussagen zu beweisen. Das finden oder verstehen von Beweisen kann somit als Training des Denkens und Argumentierens gesehen werden. Die Elementargeometrie eignet sich hier besonders, da man sich mit Skizzen leichter über das Problem und die Fragestellung Klarheit verschaffen kann.

- *Mathematik kann die Kunst des klaren Redens vermitteln.*
  Dieser Punkt hängt eng mit dem vorherigen zusammen. Sich klar ausdrücken zu können ist nicht nur in der Wissenschaft sonder fast überall im täglichen Leben wichtig. Dazu gehört ein Gespür, daß jedes Wort eine Bedeutung besitzt, entsprechend der es dann auch eingesetzt wird. In der Mathematik lernen, daß Definitionen etwas wertvolles sind, weil man sich daran festhalten kann, und davon ausgehend seine Argumente präsentieren kann. Insbesondere für die schwächeren Schüler (aber auch für alle anderen) ist es wichtig, mit maximaler Klarheit zu unterrichten und einen Sachverhalt mal richtig auf den Punkt zu bringen.

- *Mathematikunterricht soll die mathematische Fachkultur vermitteln.*
  An der Schule und der Universität gibt es viele Tätigkeiten, die keinen direkten praktischen Nutzen für die berufliche Zukunft der Schüler und Studenten hat, wie etwas Gedichtinterpretationen, chemische und physikalische Experimente, Museumsbesuche, Zooführungen, verschiedene Sportarten, etc. Die Schule soll jedoch eine vernünftige Auswahl des Wissens der Menschheit an die nächste Generation weitergeben, sonst geht dieses Wissen irgendwann verloren. Zu dieser Auswahl gehört ein authentischer Einblick in unterschiedliche Wissenschaften. Mathematiker arbeiten mit Beweisen, also gehören einige Beweise in die Schule. Die Kunst der Didaktik besteht in einer klugen Auswahl der zu behandelnden Beweise. Geometrische Beweise eignen sich dafür besonders gut.

- *Schule soll Menschen stark machen.*
  Das ist wahrscheinlich ein Punkt, auf den sich alle verständigen können. Doch wie kann Mathematikuntrericht dazu einen Beitrag leisten? Menschen werden stark, wenn sie merken, daß sie durch eigenes Handeln, Anstrengung und Ausdauer etwas erreichen können, daraus entsteht dann Selbstvertrauen. Wir sind kein Stück Treibholz, das von den Gewalten des Ozeans herumgeworfen wird, sondern wir können einen eigenen Weg wählen und dann auch gehen. Nichts motiviert einen Menschen stärker als ein Erfolg, vorausgesetzt, daß diesem Erfolg eine Anstrengung vorausging. Die Kunst besteht nun darin, als Lehrer oder Dozent die passenden Aufgaben zu finden, mit denen dies erreicht werden kann. Wir schauen uns an, was die schwerste Aufgabe ist, die der Schüler ohne Hilfe bewältigen kann, und was die schwerste Aufgabe ist, die er mit Hilfe schafft. Und in dieses Intervall zielen wir hinein, wenn wir Aufgaben suchen.

Es gibt vier überfachliche Kompetenzen, die in die Punkte oben hineinspielen: Lernen, Begründen, Kommunizieren, Problemlösen. Diese Kompetenzen heißen überfachlich, weil sie zwar im Mathematikunterricht vermittelt werden, aber aus dem Fach Mathematik herausgreifen und für das allgemeine Leben relevant sind.

1.3 Aufgaben

Aufgabe 1.1. Versuche eine möglichst genaue Formulierung des Innensummenwinkelsatzes im Dreieck anzugeben.

Aufgabe 1.2. Ein gängiger Schulbeweis des Innenwinkelsummensatzes des Dreiecks scheint zu sein, daß man einen Bleistift an eine Kante des Dreiecks anlegt, um jede Ecke schiebt, bis er wieder an der ursprünglichen Stelle ankommt, und dann beobachtet, daß er sich um 180° (oder das Winkelmaß π) gedreht hat.
Begründe, daß dieser Beweise logisch nicht zulässig ist, und überlege Dir, wie man ihn retten kann.
Hinweis: *Wende dasselbe Prinzip auf andere Polygone an. Was können wir beobachten? Was ist die stärkste Aussage, die wir daraus folgern können? Kann man das in eine Formel schreiben? Welche Schranke erfüllt jeder einzelne Innenwinkel eines Dreiecks? Können wir diese Aussage verwenden?*

2 Euklid's Elemente

Es ist fast nichts von Euklid's Leben bekannt – er lebte ungefähr 300 v.Ch., nach Plato und vor Archimedes – jedoch haben wir mehr seiner mathematischen Schriften, als eines jeden anderen antiken Mathematikers. Sein wohl bekanntestes Werk, die Elemente (Stoicheia) ist eine Sammlung von dreizehn Einzelbüchern und bildet die Grundlage der Geomtrie und somit dieses Kurses. Seine weiteren Werke sind Data, Porisma, Pseudaria, Über die Teilung von Figuren, Oberflächenörter, Kegelschnitte. Nicht alle seiner Bücher sind überliefert, einige gelten als verschollen, andere Werke werde ihm fälschlicherweise zugeschrieben.

2.1 Euklid's Axiomensystem

In den Elementen versucht Euklid die Geometrie axiomatisch, als eine deduktive Wissenschaft aufzubauen. Für uns interessant ist das erste Buch, das sich mit der Ebenen Geometrie beschäftigt. Hier fängt er mit 23 Definitionen, 5 Axiomen und 5 Postulaten an.

2.1.1 Definitionen

Ein Axiomensystem sollte mit einer Liste von Termen beginnen, die es verwendet. Zuerst werden *primitive* Begriffe definiert, deren Bedeutung von Eigenschaften kommt, die in den Axiomen und Postulaten verwendet werden. Dann werden aufbauend auf den primitiven Begriffen weitere Begriffe eingeführt.

(D1) Ein *Punkt* ist, was ohne Teil ist.

(D2) Eine *Linie* ist breitenlose Länge.

(D3) Die Enden einer Linie sind Punkte.

(D4) *Gerade* ist eine Linie, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

(D5) Eine *Fläche* ist, was nur Länge und Breite hat.

(D6) Die Enden einer Fläche sind Linien.

(D7) *Eben* ist eine Fläche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.

(D8) Ein ebener *Winkel* ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.

(D9) Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel *geradlinig.*

(D10) Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein *Rechter*; und die stehende gerade Linie heißt *senkrecht* zu (*Lot* auf) der, auf der sie steht.

(D11) *Stumpf* ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.

(D12) *Spitz* ist ein Winkel, wenn er kleiner als ein Rechter ist.

(D13) Eine *Grenze* ist das, worin etwas endigt.

(D14) Eine *Figur* ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.

(D15) Ein *Kreis* ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind.

(D16) Und *Mittelpunkt* des Kreises heißt dieser Punkt.

(D17) Ein *Durchmesser* des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

(D18) Ein *Halbkreis* ist die vom Durchmesser und den durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur.

(D19) *Geradlinig* von Strecken umfaßte Figuren: *dreiseitige* die von drei, *vierseitige* die von vier, *vielseitige* die von mehr als vier Strecken umfaßten.

(D20) Von den dreiseitigen Figuren ist ein *gleichseitiges Dreieck* jede mit drei gleichen Seiten, ein *gleichschenkliges* jede mit nur zwei gleichen Seiten, ein *schiefes* jede mit drei ungleichen Seiten.

(D21) Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein *rechtwinkliges Dreieck* jede mit einem rechten Winkel, ein *stumpfwinkliges* jede mit einem stumpfen Winkel, ein *spitzwinkliges* jede mit drei spitzen Winkeln.

(D22) Von den vierseitigen Figuren ist ein *Quadrat* jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist, ein *längliches Rechteck* jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist, ein *Rhombus* jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist, ein *Rhomboid* jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig sind; die übrigen vierseitigen Figuren sollen *Trapeze* heißen.

(D23) *Parallel* sind Geraden, die in derselben Ebene liegen und sich auch bei Verlängerung nach beiden Seiten ins Unendliche nicht treffen.

Einige dieser Definitionen sind etwas verworren oder gar esoterisch formuliert. Sie sind wohl aus dem Wunsch heraus entstanden, die Realität in einem logisch abgeschlossenen System abzubilden. Nehmen wir einmal die Definition eines Punktes, sie hat sich im Laufe der Zeit folgendermaßen entwickelt:

Plato, ca. 380 v. Chr.: *Ein Punkt ist der Anfang einer Linie.*

Aristoteles, ca. 340 v. Chr.: *Ein Punkt ist eine unteilbare Einheit, die eine Position besitzt.*

Euklid, ca. 325 v. Chr.: *Was keine Teile hat, ist ein Punkt.*

Heron, ca. 50 n. Chr.: *Ein Punkt ist, was keine Teile hat oder eine Begrenzung ohne Dimension oder die Grenze einer Linie.*

Simplicius, 6.Jh. n. Chr.: *Punkte sind Anfänge von Größen und das, woraus diese erwachsen. Weiterhin sind Punkte die einzigen Objekte, die über eine Position verfügen.*

Offenbar genügt keine dieser Definitionen den Ansprüchen logischer Exaktheit. Sie stellen eher Versuche dar, den Begriff Punkt zu beschreiben. Für die Verwendung in mathematischen Beweisen sind alle diese Definitionen ungeeignet. Das muß bereits Euklid bemerkt haben, da er bei Beweisen nie Definitionen benutzt, sondern immer auf Postulate und Axiome zurückgreift.

2.1.2 Postulate

Jedes der Postulate ist eine Aussage die ohne Beweis akzeptiert wird, und in diesem Sinne ein Axiom. Während Euklid dies nicht explizit erwähnt, so wird doch klar, daß alle Postulate für die Geometrie einer Ebene gedacht sind.

(P1) Von einem Punkt zu einem anderen Punkt kann man eine Strecke ziehen.

(P2) Man kann eine Strecke zu einer Geraden verlängern.

(P3) Man kann einen Kreis mit jedem gegebenen Radius und jedem gegebenen Mittelpunkt ziehen.

(P4) Alle rechten Winkel sind einander gleich.

(P5) Wenn bei einer Geraden, die zwei andere Geraden schneidet, die Summe der beiden Innenwinkel (Nachbarwinkel) an der gleichen Seite kleiner ist als die Summe von zwei rechten Winkeln, so werden sich die beiden Geraden auf der Seite schneiden, an der sich diese beiden Winkel befinden.

Die ersten drei der Postulate sind Forderungen an die Konstruierbarkeit. Diese bilden insbesondere die Grundlage der *Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.* Das vierte Postulat befasst sich mit einer Größe und ist die Grundlage der Winkelmessung. Unter diesem Aspekt ordnet es sich eher in die Liste der „Axiome“ die im nächsten Abschnitt folgt ein.
Das letzte Postulat wird oft Parallelenaxiom genannt, da man mit ihm Eigenschaften paralleler Linien beweisen kann. Es ist historisch gesehen das umstrittenste. Alle Versuche, dieses Postulat aus den anderen zu beweisen, waren gescheitert, sodaß der Wunsch aufkam, Modelle für Geometrien zu entdecken, in denen dieses Axiom nicht gilt. Dies führte zur sogenannten nicht-euklidischen Geometrie.

2.1.3 Axiome

Was hier Axiome genannt wird, bezieht sich auf Größen verschiedener Art. Das hat nicht unbedingt etwas mit Größenmessung zu tun, ist aber eine Grundlage dafür. Stattdessen werden Strecken, Winkel und Figuren selbst als Größen angesehen. Die Formulierung der Axiome ist allerdings allgemeiner, so daß sie als Grundlage der abstrakten Algebra aufgefasst werden kann.

(A1) Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.

(A2) Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.

(A3) Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.

(A4) Was einander deckt, ist einander gleich.

(A5) Das Ganze ist größer als der Teil.

Größen der gleichen Art können verglichen, addiert und subtrahiert werden, aber Größen verschiedener Art nicht. So kann man keine Linie zu einem Rechteck addieren, und keinen Winkel mit einem Fünfeck vergleichen.
Man kann argumentieren, daß die Axiome nicht vollständig sind. In der Tat verwendet Euklid Eigenschaften von Größen, die er vorher nicht aufführt oder beweist. Eine zentrale darunter, die mehrmals verwendet wird und als Axiom hätte genannt werden sollen, ist das

Prinzip der Trichotomie. *Für zwei Größen der gleichen Art x und y gilt genau einer der drei Fälle $x < y$, $x = y$ oder $x > y$.*

2.2 Einige Folgerungen

Der Rest des ersten Buches der Elemente besteht aus Aussagen und Konstruktionen, die sich aus dem Axiomensystem herleiten lassen sollten. Sie sind als Propositionen bezeichnet, wobei der Begriff jedoch in einem breiteren Sinn aufgefasst wird, als wir ihn heute verwenden. Wir werden hier und in den Aufgaben einige davon kennenlernen.

Proposition 2.1. *Über einer gegebenen Strecke kann ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.*

Konstruktion. Sei AB die gegebene Strecke. Nach Postulat (P3) ziehen wir einen Kreis um A mit Radius $\overline{AB}$. Ebenso ziehen wir einen Kreis um B mit Radius $\overline{BA} = \overline{AB}$. Diese schneiden in einem Punkt C. Nach Postulat (P1) können wir A und B mit C verbinden und erhalten Strecken $[AC]$ und $[BC]$.
Da A der Mittelpunkt des ersten Kreises ist, ist nach Definition (D15) $\overline{AB}$ gleich $\overline{AC}$. Ebenso ist, da B der Mittelpunkt des zweiten Kreises ist, ist $\overline{AB}$ gleich $\overline{BC}$. Nach Axiom (A1) ist somit auch $\overline{AC}$ gleich $\overline{BC}$. Somit genügt das erhaltene Dreieck $\triangle_{ABC}$ der Definition (D20), ist also gleichseitig wie gewünscht. **q.e.f.**

Für die beiden nächsten Konstruktionen muß man wissen, das nach dem Axiomensystem von Euklid der Zirkel a priori nicht abgehoben und unverändert an einem anderen Punkt mit gleicher Weite einzusetzen. Es muß erst gezeigt werden, daß dies möglich ist.

Proposition 2.2. *An einem gegebenen Punkt kann man eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke anlegen. (Die Richtung der angelegten Strecke kann man dabei nicht festlegen)*

Konstruktion. Sei ein Punkt A und eine Strecke $[BC]$ gegeben. Nach Postulat (P1) verbinden wir A und B zu einer Strecke $[AB]$. Nach Proposition 2.1 konstruieren wir ein gleichseitiges Dreieck $\triangle_{ABD}$ über $[AB]$.
Nach Postulat (P2) können wir $[DA]$ respektive $[DB]$ über A respektive B hinaus beliebig verlängern. Postulat (P3) erlaubt es uns einen Kreis um B mit Radius $\overline{BC}$ zu ziehen. Dieser schneidet die Verlängerung von $[DB]$ in einem Punkt E. Wiederum nach Postulat (P3) ziehen wir einen Kreis um D mit Radius $\overline{DE}$. Dieser schneidet die Verlängerung von $[DA]$ in einem Punkt F.
Da B der Mittelpunkt des ersten Kreises ist, ist nach Definition (D15) $\overline{BC}$ gleich $\overline{BE}$. Genauso ist, da D der Mittelpunkt des zweiten Kreises ist, $\overline{DE}$ gleich $\overline{DF}$. Da nach Konstruktion $\overline{DA}$ gleich $\overline{DB}$ ist, sind nach Axiom (A3) die Reste $\overline{AF}$ und $\overline{BE}$ gleich.
Da $\overline{BE}$ gleich $\overline{BC}$ ist, folgt mit Axiom 1, daß auch $\overline{AF}$ gleich $\overline{BC}$ ist. Somit haben wir an A eine Strecke angetragen, die gleich lang wie $[BC]$ ist. **q.e.f.**

Proposition 2.3. *Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, kann man auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke abtragen.*

Konstruktion. Dies wird in den Aufgaben behandelt. **q.e.f.**

Nun kommen wir zu der ersten Kongruenzaussage.

Proposition 2.4. *Wenn bei zwei Dreiecken zwei Seiten und deren Zwischenwinkel übereinstimmen, dann sind die Dreiecke gleich. Insbesondere stimmen die verbleibenden Seiten und Winkel überein.*

Beweis. Seien $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{DEF}$ zwei Dreiecke, wobei die Seite $[AB]$ mit $[DE]$ übereinstimmt, und $[AC]$ mit $[DF]$, und der Zwischenwinkel $\sphericalangle_{BAC}$ mit dem Zwischenwinkel $\sphericalangle_{EDF}$ übereinstimmt.
Wenn wir die beiden Dreiecke übereinander legen, so daß A auf D liegt und die Strecke $[AB]$ auf $[DE]$. Dann stimmt auch B mit E überein, da $[AB]$ gleich $[DE]$. Da die Winkel $\sphericalangle_{BAC}$ und $\sphericalangle_{EDF}$ gleich sind, liegt auch $[AC]$ über $[DF]$, welche gleich sind, und somit ist C gleich F.
Es folgt, daß $[EF]$ von $[BC]$ überdeckt wird, diese sind also nach Axiom (A4) gleich. Und weiter überdeckt das Dreieck $\triangle_{ABC}$ das Dreieck $\triangle_{DEF}$, sie sind also wiederum nach Axiom (A4) (deckungs)gleich. Insbesondere sind auch die Winkel $\sphericalangle_{CBA}$ und $\sphericalangle_{FED}$, beziehungsweise $\sphericalangle_{ACB}$ und $\sphericalangle_{DFE}$ gleich. **q.e.d.**

Die Methode des obigen Beweises wird manchmal „Überdeckung“ genannt. Euklid mochte sie anscheinend nicht, denn er verwendete sie nur spärlich. In der Tat ist nicht klar, was mathematisch genau mit „Überdeckung“ gemeint ist. Eine häufige Interpretation ist, das Teile der Dreiecke miteinander assoziiert werden. Es gibt auch keine Postulate in Eulers System, die es erlauben, Schlussfolgerungen aus „Überdeckungen“ zu ziehen. Eine Möglichkeit wäre, die Aussage selbst als Axiom hinzuzunehmen, und genau das ist es, was Hilbert macht, wie wir sehen werden.

Proposition 2.5. *In einem gleichschenkligen Dreieck stimmen die Basiswinkel überein. Wenn die Schenkel verlängert werden, stimmen die Winkel unter der Basis überein.*

Beweis. Der erste Teil wird in den Aufgaben besprochen. Zeigen wir also den zweiten Teil.
Sei $\triangle_{ABC}$ ein gleichseitiges Dreieck definiert in Definition (D20) mit den beiden gleichen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, die wir Schenkel nennen. Nach Postulat (P2) können wir $[AB]$ über B hinaus, und $[AC]$ über C hinaus beliebig verlängern. Sei D ein beliebiger Punkt auf der Verlängerung von $[AB]$ außerhalb des Dreiecks. Nach Proposition 2.3 können wir von der Verlängerung von $[AC]$ außerhalb des Dreiecks eine Strecke gleich $[BD]$ abtragen. Sei E der so erhaltene Punkt auf der Verlängerung von $[AC]$. Somit sind $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ gleich. Nach Postulat (P1) können wir D und C, sowie E und B verbinden.
Betrachte nun die Dreiecke $\triangle_{ADC}$ und $\triangle_{AEB}$. Da $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, sowie $\overline{BD}$ und $\overline{CE}$ gleich sind, sind nach Axiom (A2) auch $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ gleich. Also haben die beiden Dreiecke je zwei gleiche Seiten. Weiterhin ist nach Konstruktion $\sphericalangle_{DAC}$ gleich $\sphericalangle_{EAB}$, das heißt die Zwischenwinkel stimmen ebenso überein. Somit sind nach Proposition 2.4 die beiden Dreiecke gleich. Insbesondere sind die übrigen Winkel auch gleich, das heißt $\sphericalangle_{ABE}$ ist gleich $\sphericalangle_{ACD}$ und $\sphericalangle_{ADC}$ ist gleich $\sphericalangle_{AEB}$. Weiterhin ist $\overline{DC}$ gleich $\overline{EB}$.
Nun betrachten wir die beiden Dreiecke $\triangle_{DBC}$ und $\triangle_{ECB}$. Wir wissen, daß die Seite $\overline{BD}$ des ersten Dreiecks gleich der Seite $\overline{CE}$ des zweiten Dreiecks ist. Gerade haben wir gesehen, daß die Seite $\overline{DC}$ des ersten Dreiecks gleich der Seite $\overline{EB}$ ist, und daß die Zwischenwinkel $\sphericalangle_{ABE}$ und $\sphericalangle_{ACD}$ übereinstimmen. Wieder nach Proposition 2.4 sind die beiden Dreiecke gleich. Insbesondere gleicht der Winkel $\sphericalangle_{DBC}$ dem Winkel $\sphericalangle_{BCE}$, und das war zu zeigen. **q.e.d.**

Um den ersten Teil der obigen Proposition zu zeigen, kann man die Argumentation an dieser Stelle fortführen. Es gibt aber auch ein direkteres Argument. Wir betrachten als nächste den Umkehrschluss von Proposition 2.5

Proposition 2.6. *Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch die jeweils gegenüberliegenden Seiten einander gleich.*

Beweis. Übung. **q.e.d.**

Wir listen hier noch die weiteren Sätze von Euklid ohne Beweise auf. Auf diese werden wir zum Teil noch später eingehen.

Proposition 2.7. *Seien an jedem Ende einer Strecke jeweils eine Gerade angelegt, die sich in einem Punkt schneiden. Dann kann es auf der gleichen Seite der Strecke nicht zwei weitere Geraden geben, die sich in in einem anderen Punkt treffen, aber gleich den ersten beiden sind.*

Proposition 2.8. (SSS-Satz) *Wenn bei zwei Dreiecken alle Seiten übereinstimmen, so stimmen auch die Winkel überein.*

Proposition 2.9. *Ein gegebener Winkel kann halbiert werden.*

Proposition 2.10. *Eine gegebene Strecke kann halbiert werden.*

Proposition 2.11. *Auf einer gegebenen Strecke kann in einem gegebenen Punkt eine Senkrechte errichtet werden.*

Proposition 2.12. *Von einem gegebenen Punkt aus kann man auf eine gegebene Gerade, auf der der Punkt nicht liegt, das Lot fällen.*

Proposition 2.13. *Nebenwinkel ergeben zusammen zwei rechte Winkel.*

Proposition 2.14. *Wenn an einem Punkt auf einer Geraden auf jeder Seite eine Halbgerade angelegt ist, und die gegenüberliegenden Winkel zwei rechte Winkel ergeben, so liegen die beiden Halbgeraden in einer gemeinsamen Geraden*

Proposition 2.15. *Scheitelwinkel sind gleich.*

Proposition 2.16. (Außenwinkelsatz) *An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.*

Proposition 2.17. *In jedem Dreieck ist die Summe von zwei beliebigen Innenwinkeln echt kleiner zweier rechten Winkel.*

Proposition 2.18. *In jedem Dreieck ist der Winkel gegenüber der größeren Seite größer.*

Proposition 2.19. *In jedem Dreieck ist die Seite gegenüber dem größeren Winkel größer.*

Proposition 2.20. (Dreiecksungleichung) *In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.*

Proposition 2.21. *Wenn an den Enden einer Seite eines Dreiecks zwei Geraden angelegt werden, die sich innerhalb des Dreiecks schneiden, dann ist die Summe der erhaltenen Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten des Dreiecks, aber sie schließen einen größeren Winkel ein, als die beiden anderen Seiten des Dreiecks.*

Proposition 2.22. *Man kann ein Dreieck mit drei gegebenen Seiten konstruieren, wenn jeweils die Summe von zwei größer als die dritte ist.*

Proposition 2.23. *Man kann das Lot auf einer Geraden in einem gegebenen Punkt auf der Geraden errichten.*

Proposition 2.24. *Wenn bei zwei Dreiecken zwei Seiten übereinstimmen, aber bei dem einen schließen sie einen größeren Winkel ein, so ist auch die gegenüberliegende Seite dieses Dreiecks größer als bei dem anderen.*

Proposition 2.25. *Wenn bei zwei Dreiecken zwei Seiten übereinstimmen, aber bei dem einen die dritte Seite größer ist, so ist bei diesem auch der Winkel, der von den ersten beiden Seiten eingeschlpssen wird größer.*

Proposition 2.26. (WWS-Satz) *Wenn bei zwei Dreiecken zwei Winkel übereinstimmen, und entweder die Seiten zwischen den Winkeln oder jeweils eine einen der Winkel gegenüberliegende Seite gleich sind, so sind die Dreiecke gleich.*

Proposition 2.27. *Hat ein Geradenpaar an einer dritten Geraden gleiche Wechselwinkel, so ist das Paar parallel.*

Proposition 2.28. *Hat ein Geradenpaar an einer dritten Geraden gleiche Stufenwinkel oder addieren sich die inneren Winkel auf einer Seite zu zwei rechten Winkeln, so ist das Paar parallel.*

Proposition 2.29. *Wenn eine Gerade auf zwei parallele Geraden fällt, so sind die Wechselwinkel und Stufenwinkel gleich, und die inneren Winkel auf einer Seite addieren sich zu zwei rechten Winkeln.*

Proposition 2.30. *Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so auch untereinander.*

Proposition 2.31. *Konstruktion der Parallelen zu einer gegebenen Gerade durch einen Punkt.*

Proposition 2.32. *Der Außenwinkel eines Dreiecks ist die Summe der zwei nicht anliegenden Innenwinkel. Die Summe aller drei Winkel ist zwei rechte Winkel.*

Proposition 2.33. *Sind zwei Gegenseiten eines (konvexen) Vierecks gleich und parallel, so gilt das auch für das andere Gegenseitenpaar.*

Proposition 2.34. *Im Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten beziehungsweise Winkel gleich, jede Diagonale zerlegt das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke.*

Proposition 2.35. *Parallelogramme zwischen denselben Parallelen mit gleicher Basis sind flächengleich.*

Proposition 2.36. *Parallelogramme zwischen denselben Parallelen mit gleichlanger Basis sind flächengleich.*

Proposition 2.37. *Dreiecke zwischen denselben Parallelen mit gleicher Basis sind flächengleich.*

Proposition 2.38. *Dreiecke zwischen denselben Parallelen mit gleichlanger Basis sind flächengleich.*

Proposition 2.39. *Flächengleiche Dreiecke mit gleicher Basis in der gleichen Geraden liegen zwischen denselben Parallelen.*

Proposition 2.40. *Flächengleiche Dreiecke mit gleichlanger Basis in der gleichen Geraden liegen zwischen denselben Parallelen.*

Proposition 2.41. *Haben ein Parallelogramm und ein Dreieck dieselbe Grundlinie und liegen sie zwischen denselben Parallelen, so hat das Parallelogramm die doppelte Fläche wie das Dreieck.*

Proposition 2.42. *Konstruktion eines einem Dreieck flächengleichen Parallelogrammes mit gegebenem Winkel.*

Proposition 2.43. *Teilt man ein Parallelogramm durch einen inneren Punkt einer Diagonale in vier Parallelogramme mit parallelen Seiten, so sind die zur Diagonalen fremden Parallelogramme flächengleich.*

Proposition 2.44. *Konstruktion eines einem Dreieck flächengleichen Parallelogrammes mit gegebenem Winkel an eine gegebene Gerade.*

Proposition 2.45. *Konstruktion eines einem Viereck flächengleichen Parallelelogrammes mit gegebenem Winkel.*

Proposition 2.46. *Konstruktion eines Quadrates über einer Seite.*

Proposition 2.47. (Satz des Pythagoras) *Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den anliegenden Seiten des rechten Winkels gleich dem Quadrat über der gegenüberliegenden Seite (Hypotenuse).*

Proposition 2.48. *Wenn in zwei Dreiecken das Quadrat über einer der Seiten gleich der Summe der Quadrate über den restlichen beiden Seiten ist, dann ist der von diesen eingeschlossene Winkel ein rechter.*

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1. Versuche zu definieren, was ein Punkt ist.

Aufgabe 2.2. Gib basierend auf Euklid's Axiomensystem eine Konstruktion an, wie man von der größeren zweier gegebener ungleicher Strecken eine Strecke gleich der kleineren abträgt.

Aufgabe 2.3. Zeige basierend auf Euklid's Axiomensystem, daß in einem gleichseitigen Dreieck die Basiswinkel übereinstimmen.

Aufgabe 2.4. Zeige basierend auf Euklid's Axiomensystem, daß wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, auch die jeweils gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind.

3 Wie soll ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie ausschauen?

Wir haben schon gesehen, daß das Axiomensystem von Euklid nicht den heutigen Standards entspricht. Wir sind vor allem auf die Mängel der Definitionen eingegangen, die nicht den Ansprüchen der logischen Exaktheit, die die Wissenschaft heutzutage hat, genügen. Ein ähnliches Problem haben allerdings auch die Axiome und Postulate, deren Formulierungen oft nicht exakt genug sind. Zum Beispiel wird nicht gesagt, was „gleich sein“ bedeutet. Diese beiden Punkte sind angesichts des Entstehungszeitraums, und der Zeit, die seitdem vergangen ist, nicht verwunderlich.
Ein weiteres Problem, das man nicht ohne weiteres sieht, beziehungsweise nicht so einfach nachprüfen kann, ist das der Vollständigkeit. Nicht alle relevanten Aussagen der Geometrie lassen sich aus dem Axiomen und Postulaten herleiten. Wir haben schon bemerkt, daß wir das Gesetz der Trichotomie an mehreren Stellen benötigen.

3.1 Anforderungen an ein Axiomensystem

Definition 3.1. Ein klassisches Axiomensystem sieht folgerndermaßen aus:

1. Festlegung der Grundbegriffe (=*primitive Terme*).
2. Angabe einer Liste grundlegender Aussagen (=*Axiome*) über die primitiven Terme. Die Axiome sollten möglichst einfach gehalten werden, und über ihre Wahrheit sollte allgemeine Einigkeit herrschen.
3. Alle anderen benötigten Begriffe werden mit Hilfe der primitiven Terme und der Axiome erklärt (=*Definitionen*).
4. Alle weiteren Aussagen (=*Theoreme, Propositionen,Lemmata*) werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet.

Definition 3.2. Unter einem Modell einer mathematischen Theorie (in unserem Fal eines Axiomensystems) verstehen wir die Interpretation dieser Theorie in einer bereits bekannten (mathematischen oder nichtmathematischen) Struktur.

Das bedeutet, daß die in der Theorie verwendeten Grundbegriffe innerhalb der bekannten Struktur eine konkrete Bedeutung zugewiesen bekommen und untersucht wird, ob bei dieser Interpretation der Grundbegriffe die Axiome der Theorie erfüllt sind. Illustrieren wir das zunächst an einem Beispiel, das scheinbar nichts mit Geometrie zu tun hat.

Beispiel 3.3. Wir wollen eine Ansammlung von Bäumen untersuchen, die ein Landschaftsgärtner gepflanzt hat. Sie sind so angeordnet, daß manche in einer Reihe stehen – damit wir sinnvolle Aussagen machen können, wollen wir leere Reihen ausschließen. Wir werden sehen, daß es keine Rolle spielt, daß es um Bäume geht, oder was genau eine Reihe ist, aber daß wir für jeden Baum x und jede Reihe X entscheiden können, ob x zu X gehört.

Primitive Terme: Die primitiven Terme sind „Baum“, „Reihe“ und „gehören zu“.
Es existiere eine Menge $\mathfrak{B}$ und eine Menge $\mathfrak{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

Axiom 1: Jeder Baum gehört zu (mindestens) einer Reihe.
Für jedes $x \in \mathfrak{B}$ existiert $X \in \mathfrak{R}$ mit $x \in X$.

Axiom 2: Zwei verschiedene Bäume gehören zu genau einer gemeinsamen Reihe.
Für $x, y \in \mathfrak{B}$ mit $x \neq y$ gibt es ein eindeutiges $X \in \mathfrak{R}$ mit $x, y \in X$.

Definition: Zwei Reihen heißen disjunkt, falls kein Baum beiden gleichzeitig angehört.
$X, Y \in \mathfrak{R}$ heißen disjunkt, falls für alle $x \in X$ gilt $x \notin Y$. Wir schreiben $X \cap Y = \varnothing$.

Axiom 3: Jede Reihe ist zu genau einer anderen Reihe disjunkt.
Für alle $X \in \mathfrak{R}$ existiert ein eindeutiges $Y \in \mathfrak{R}$, so daß $X \cap Y = \varnothing$.

Nun können wir anfangen Aussagen zu Beweisen.

Satz 1: Jeder Baum gehört zu mindestens zwei Reihen.
Für $x \in \mathfrak{B}$ existieren $X, Y \in \mathfrak{R}$ mit $X \neq Y$ und $x \in X$, $x \in Y$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{B}$ ein Baum. Dann gibt es nach Axiom 1 eine Reihe $X \in \mathfrak{R}$ mit $x \in X$. Nach Axiom 3 gibt es genau eine Reihe $Y \in \mathfrak{R}$ mit $X \cap Y = \varnothing$. Sei $y \in Y$. Dieses existiert, da Reihen nicht leer sind. Da X und Y disjunkt sind, ist $x \neq y$. Nach Axiom 2 gibt es eine Reihe $Z \in \mathfrak{R}$ mit $x, y \in Z$. Da $y \in Z$ und $y \notin X$, ist $Z \neq X$. Somit sind $X, Z \in \mathfrak{R}$ verschiedene Reihen, die x enthalten. **q.e.d.**

Satz 2: Jede Reihe enthält mindestens zwei Bäume.
Für $X \in \mathfrak{R}$ gibt es $x, y \in \mathfrak{B}$ mit $x \neq y$ und $x, y \in X$.

Beweis. Wähle $x \in X$, welches existiert, da Reihen nicht leer sind. Nach Satz 1 gibt es eine Reihe $Y \in \mathfrak{R}$ mit $Y \neq X$ und $x \in Y$. Nach Axiom 3 gibt es eine eindeutige Reihe Z mit $Z \cap Y = \varnothing$. Da $x \in Y$ ist also $x \notin Z$. Angenommen, X enthält nur x. Da $x \notin Z$ folgt $X \cap Z = \varnothing$. Wieder nach Axiom 3 gibt es eine eindeutige Reihe, die mit Z leeren Schnitt hat. Da $Z \cap Y = \varnothing = X \cap Z$, folgt also $X = Y$. Das ist ein Widerspruch zu $Y \neq X$. Somit enthält X mindestens zwei Bäume. **q.e.d.**

Satz 3: Es gibt mindestens sechs Reihen.
Es gilt $|\mathfrak{R}| \geqslant 6$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{B}$. Nach Satz 1 gibt es $X \neq Y$ in $\mathfrak{R}$ mit $x \in X \cap Y$. Insbesondere ist $X \cap Y \neq \varnothing$. Nach Satz 2 gibt es $y \neq x$ mit $y \in X$. Wegen Axiom 2 muß dann gelten $y \notin Y$. Aber auch Y muß nach Satz 2 mindestens zwei Elemente enthalten. Somit gibt es $z \in Y$ mit $z \neq x$, und wieder nach Axiom 2 $z \notin X$. Sei nun Z die nach Axiom 2 eindeutige Reihe, mit $z, x \in Z$. Nach Konstruktion muß gelten $X \neq Z \neq Y$, und $X \cap Z \neq \varnothing \neq Y \cap Z$. Nach Axiom 3 gibt es genau eine zu X disjunkte Reihe V und eine zu Y disjunkte Reihe W. Diese können selbst nicht disjunkt sein, denn sonst wäre nach der Eindeutigkeit von Axiom 3, $X = W$ und $Y = V$ und somit $X \cap Y = \varnothing$, was nicht möglich ist. Es kann auch nicht $V = W$, denn sonst wäre wieder nach der Eindeutigkeit von Axiom 3 $X = Y$, was ausgeschlossen wurde. Also ist $V \neq W$ und $V \cap W \neq \varnothing$. Nach Axiom 3 gibt es eine eindeutige Reihe U mit $U \cap Z = \varnothing$. Da $X \cap Z \neq \varnothing \neq Y \cap Z$ muß $X \neq U \neq Y$ gelten, und wegen der Eindeutigkeit in Axiom 3 auch $V \neq U \neq W$. Wir haben also sechs paarweise verschiedene Reihen U, V, W, X, Y, Z gefunden. **q.e.d.**

Satz 4: Jede Reihe enthält genau zwei Bäume. Insgesamt gibt es genau vier Bäume und sechs Reihen.
Für $X \in \mathfrak{R}$ gilt $|X| = 2$. Weiterhin gilt $|\mathfrak{B}| = 4$ und $|\mathfrak{R}| = 6$.

Beweis. Übung. **q.e.d.**

In den Übungen werden wir feststellen, daß es sich hier nur um eines von mehreren Modellen des Axiomensystems handelt.

Bevor wir ein modernes Axiomensystem für die ebene Geometrie betrachten, wollen wir einmal alle Anforderungen auflisten, die es erfüllen sollte. Hierzu benötigen wir den Begriff des Modells.

1. **Widerspruchsfreiheit:** Diese Anforderung scheint logisch zu sein, denn ist sie verletzt können die Objekte und Aussagen, die wir beschreiben wollen, eventuell nicht existieren. Die Widerspruchsfreiheit beweist man am besten durch Konstruktion eines Modells. Allerdings ist dies nach Kurt Gödel nicht möglich, ohne die Widerspruchsfreiheit eines etwas primitiveren Systems als gegeben hinzunehmen.

2. **Unabhängigkeit (Minimalität):** Kein Axiom soll aus den anderen hergeleitet werden können. Um zu zeigen, dass Axiom A von einem System S von Axiomen unabhängig ist, muss man ein Modell konstruieren, in dem alle Axiome von S gelten, nicht aber A.

3. **Vollständigkeit (Maximalität):** Ein System ist vollständig, wenn man kein unabhängiges Axiom hinzufügen kann (das nur die schon bekannten Terme benutzt), ohne Widersprüche zu erzeugen. Die Vollständigkeit eines Systems ist i.a. sehr schwer nachzuweisen.

4. **Kategorizität:** Ein Axiomensystem heißt kategorisch, wenn es widerspruchsfrei ist, und wenn je zwei Modelle eineindeutig aufeinander abgebildet werden können. Man sagt dann, die Modelle sind isomorph.

Natürlich wäre noch wünschenswert, wenn ein Axiomensystem, das was es beschreiben soll, nicht unnötig verkompliziert, und so Verständnis, Studium und Forschung erschwert.

5. **Einfachheit:** Ein Axiomensystem sollte so einfach wie möglich sein, ohne die obigen Anforderungen zu vernachlässigen.

3.2 Geometrische Axiomatik und Realität

Axiome sind Grundannahmen, die meist aus bereits vorhandenen Vorstellungen über den zu definierenden Begriff resultieren, von deren Gültigkeit man ausgeht und die deshalb auch nicht bewiesen werden müssen. Die Axiome der euklidischen oder ebenen Geometrie sollten demnach auf der Realität basieren. Ausgehend davon soll ein System entwickelt werden, das es erlaubt, Geometrie auf rein deduktivem Wege betreiben zu können. In der Tat werden wir in den Aufgaben ein Beispiel betrachten, wo man sieht, daß es gefährlich sein kann, sich auf die Anschauung zu verlassen.
Dennoch darf die Geometrie auch in ihrer modernen Formulierung den Bezug zur Realität nicht verlieren. Insbesondere sollte bei der Aufstellung eines Axiomensystems die Realität in zweierlei Hinsicht ein Rolle spielen:

1. Die Axiome müssen den Gegebenheiten des realen Raumes Rechnung tragen und dürfen diesen nicht widersprechen.

2. Die Axiome müssen hinreichend sein, um alle uns aus der Anschauung oder der Praxis bekannten geometrischen Eigenschaften abzuleiten.

Hierbei sollten wir jedoch stehts im Hinterkopf behalten, daß unsere Erfahrungen und Intuitionen nicht immer der Realität entsprechen. Das Axiomensystem hängt auch davon ab, welche geometrischen Strukturen und Sachverhalte beschrieben werden sollen. Wollen wir zum Beispiel exakte Größen von Stecken oder Figuren bestimmen, oder sind wir nur an Größenverhältnissen und Größenvergleichen interessiert? Wollen wir Geometrie der Ebene betrachten, oder wollen wir untersuchen, wie sich geometrischen Figuren auf einer Kugeloberfläche verhalten? In jedem Fall werden wir versuchen, das Axiomensystem auf unsere Ziele auszurichten.

Ziel 3.4. *In diesem Kurs wollen wir uns mit der Geometrie der Ebene befassen, und versuchen, ein Axiomensystem zu entwickeln, das es erlaubt, die von Euklid postulierten Aussagen, das heißt die Propositionen, herzuleiten.*

Um dies so einfach wie möglich aber so genau wie nötig zu gestalten, werden wir die Mengenlehre und die reellen Zahlen als bekannt voraussetzen.
Oft steht mathematische Eleganz dem leichten Verständnis gegenüber, und die Forderung nach einem minimalen oder unabhängigen System mit recht schwer verständlichen Axiomen verbunden.

Beispiel 3.5. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$, wobei G eine Menge ist, und $\circ$ eine Verknüpfung, so daß folgendes erfüllt ist:

(G1') Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

(G2') Für alle $a, b \in G$ gibt es $x, y \in G$ mit $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$.

Dieses Axiomensystem ist widerspruchsfrei, da zum Beispiel das Modell $(\mathbb{R}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die üblichen Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist beide Axiome erfüllt.
Es ist unabhängig, da das Modell $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y := \frac{x+y}{2}$ das zweite Axiom erfüllt, aber nicht das erste, und das Modell $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y := x$ das erste Axiom erfüllt, aber nicht das zweite.
Die Vollständigkeit ist sehr schwer nachzuweisen.
Das System ist nicht kategorisch, da es zum Beispiel endliche und unendliche Gruppen gibt.
Weiterhin widerspricht es dem Prinzip der Einfachheit, da es unter anderem mühsam ist, die Existenz eines neutralen Elements zu beweisen. Deshalb verwendet man lieber das Axiomensystem

(G1) Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

(G2) Es existiert $e \in G$, so daß für alle $x \in G$ gilt $x \circ e = e \circ x = x$.

(G3) Für alle $x \in G$ existiert $y \in G$, so daß $x \circ y = y \circ x = e$.

Wir werden also nach und nach Grundbegriffe und Axiome einführen und die wichtigsten Aussagen und Eigenschaften der euklidischen Geometrie herleiten. Hierbei folgen wir einem Zugang, der von Hilbert entwickelt wurde. Es gibt fünf Axiomengruppen, die wir eine nach der anderen hinzunehmen, und so die Geometrie stufenweise aufbauen. Das hat mehrere Vorteile:

- Es erlaubt uns von einfacheren zu komplizierteren Aussagen aufzusteigen.

- Wir können untersuchen, welche welche Axiome für den Beweis welcher Aussagen ausreichen.
  Historisch gesehen ist es interessant zu sehen, welche Sätze ohne das Parallelenaxiom bewiesen werden können und für welche dieses Axiom unverzichtbar ist.

- Genauer ist es auch interessant, welche geometrischen Eigenschaften aus den entsprechenden Axiomen heraus noch nicht gegeben sind.
  Dazu werden Modelle einzelner Axiomengruppen betrachtet, die verdeutlichen, welche Spielräume diese Axiomengruppen offenlassen.

3.3 Aufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, daß nach den Axiomen 1-4 aus Beispiel 3.3 gilt:
Jede Reihe enthält genau zwei Bäume. Insgesamt gibt es genau vier Bäume und sechs Reihen.

Aufgabe 3.2. Interessanterweise haben wir in Beispiel 3.3 nie benutzt, daß wir mit Bäumen und Reihen arbeiten. Genauso hätten wir alles in Form des Schildkrätenclubs formulieren können: Die Mitglieder des Schildkrötenclubs sind Schildkröten, sie finden sich gelegentlich zusammen, um Ausschüße zu bilden. Im Moment ist die Situation folgendermaßen:

(a) Jede Schildkröte gehört mindestens einem Ausschuß an.

(b) Je zwei Schildkröten gehören genau einem gemeinsamen Ausschuß an.

(c) Zu jedem Ausschuß findet sich genau ein anderer Ausschuß, dessen Mitglieder alle dem zuerst genannten Ausschuß nicht angehören.

Wir können also folgern: Der Club hat genau vier Mitglieder, und es gibt genau sechs Ausschüße.
Man spricht von Modellen des Axiomensystems.
Finde ein rein geometrisches Modell des Axiomensystems, und folgere, daß das Axiomensystem Widesspruchsfrei ist.

Aufgabe 3.3. Zeige, daß die Axiomensystem (G1')-(G2') und (G1)-(G2)-(G3) aus Beispiel 3.5 äquivalent sind.
Hinweis: *Zeige hierzu (unter Benutzung von (G1) beziehungsweise (G1')), daß (G2) und (G3) aus (G2') folgen und umgekehrt.*

Aufgabe 3.4. Betrachte folgendes Axiomensystem der Ebene und untersuche es auf Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit:

(E1) Geraden sind Mengen von Punkten.

(E2) Zwei voneinander verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

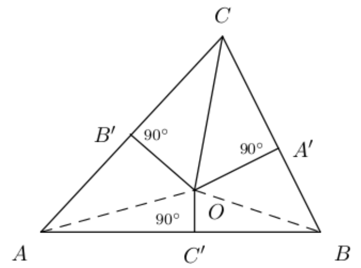
(E3) Durch jeden Punkt der Ebene gibt es zu jeder Geraden, die diesen Punkt nicht enthält, genau eine Gerade, die mit der gegebenen Gera- den keinen gemeinsamen Punkt hat.

(E4) Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält.

Hinweise: *Finde ein Modell, um die Widerspruchsfreiheit zu zeigen.*
Um die Unabhängigkeit zu widerlegen, zeige, daß (E2) aus den übrigen Axiomen folgt.
Formuliere eine Aussage, die nicht bewiesen werden kann, was zeigt, daß das System nicht vollständig ist.

Aufgabe 3.5. Euklid hatte versucht aus Beobachtungen (die wahrscheinlich oft auf Skizzen basierten), ein konsistentes System zu entwickeln. Diese Aufgabe zeit, daß es gefährlich ist, wenn man sich nur auf den Augenschein verläßt. Betrachte folgende Aussage und den Beweis dazu, wobei alles Wissen aus der Schulgeometrie verwendet werden darf. Arbeite den Beweis nahc, und finde den Fehler.
Behauptung: *Jedes Dreieck ist gleichschenklig.*

Beweis. Im Dreieck $\triangle_{ABC}$ wird der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle_{ACB}$ mit der Mittelsenkrechten auf $[AB]$ konstruiert. Wir bezweichnen ihn mit O. Von O fällen wir ein Lot auf AC und BC.



Nun gilt

$$\overline{C'O} = \overline{C'O}, \qquad \overline{AC'} = \overline{C'B}, \qquad \sphericalangle_{AC'O} = \sphericalangle_{OC'B} = \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem SWS-Satz stimmen dann die Dreiecke überein, und $\overline{OA} = \overline{OB}$. Außerdem ist

$$\overline{CO} = \overline{CO}, \qquad \sphericalangle_{B'CO} = \sphericalangle_{A'CO} = \frac{1}{2}\sphericalangle_{ACB}, \qquad \sphericalangle_{CB'O} = \sphericalangle_{CA'O} = \frac{\pi}{2}.$$

Nach dem SWW-Satz ist also $\triangle_{CB'O} = \triangle_{CA'O}$ und somit

$$\overline{CB'} = \overline{CA'}, \qquad \overline{OB'} = \overline{OA'}.$$

Da außerdem $\sphericalangle_{OB'A} = \sphericalangle_{OA'B} = \frac{\pi}{2}$ und diese Winkel als rechte jeweils gegenüber der längeren Strecke $\overline{AO} = \overline{OB}$ sind, können wir den SSW-Satz anwenden und erhalten $\triangle_{OB'A} = \triangle_{OA'B}$. Insbesondere ist

$$\overline{AB'} = \overline{BA'}.$$

Da

$$\overline{AC} = \overline{AB'} + \overline{B'C}, \qquad \overline{BC} = \overline{BA'} + \overline{A'C}$$

folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$. **q.e.d.**

4 Axiomatische Beschreibung der euklidischen Geometrie

Wir folgen nun Hilbert um ein modernes Axiomensystem der euklidischen Geometrie anzugeben. Unser Ziel ist es, damit alle Propositionen von Euklid herleiten zu können. Wir werden verifizieren, daß unser Anschauungsmodell $\mathbb{R}^2$ die Axiome erfüllt.

4.1 Inzidenzaxiome

Wir benutzen einige Begriffe aus der Mengenlehre (Element von einer Menge, Teilmengen, leere Menge, endliche Durchschnitte und Vereinigungen, Differenzen), damit die Darstellung nicht zu kompliziert und umfassend wird. Die primitiven Terme, die wir verwenden sind geometrisch motiviert.

Primitive Terme 4.1. *Eine **Ebene** ist eine Menge $\mathcal{E}$, ihre Elemente heißen **Punkte**, bestimmte Teilmengen werden **Geraden** genannt. Ist A ein Punkt, g eine Gerade und $A \in g$, so sagen wir A **liegt auf** g oder g **enthält** A oder A **inzidiert mt** g.*

Axiom 4.2. *Jede Gerade $g \in G$ enthält mindestens zwei Punkte.*

Axiom 4.3. *Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden.*

Bemerkung 4.4. Das zweite Axiom können wir auch folgendermaßen ausdrücken:
Für je zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{E}$ gibt es genau eine Gerade g, mit $A, B \in g$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die durch diese zwei Punkte eindeutig bestimmte Gerade oft mit $g(A, B)$.

Definition 4.5. Punkte, die auf einer Geraden liegen heißen *kollinear*

Axiom 4.6. *In der Ebene gibt es mindestens drei Punkte, die nicht kollinear sind.*

Bemerkung 4.7. Das dritte Axiom garantiert, daß wir uns in zwei Dimensionen bewegen. Deshalb wird es auch oft „Dimensionsaxiom“ genannt. Für die räumliche, also dreidimensionale, Geometrie würde man vier Punkte fordern, die nicht alle in einer Ebene liegen. Allgemein würde man in der n-dimensionalen Geometrie $n + 1$ Punkte fordern, die nicht in einer *Hyperebene* liegen.

Beispiel 4.8. Ein minimales Modell für die Inzidenz-Axiome ist folgendes:
Sei $\mathcal{E} = \{A, B, C\}$ eine beliebige Menge mit drei Elementen. Die Geraden sind die zweielementigen Teilmengen $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{A, C\}$.

Natürlich sollte die Ebene der analytischen Geometrie

$$\mathbb{E} := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

die auf Descartes zurückgeht, auch ein Modell der Inzidenzaxiome sein.

Definition 4.9. Eine Gerade der Ebene $\mathbb{E}$ ist eine Teilmenge der Form

$$\{P + \lambda v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

wobei $P \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$.

Satz 4.10. *Durch zwei verschiedene Punkte A und B der Ebene $\mathbb{E}$ verläuft* genau eine Gerade $g(A, B)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die *Existenz* einer Geraden durch zwei Punkte. Es seien also $A \neq B$ zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Gerade

$$g \;:=\; \{A + \lambda \cdot (B - A) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Da A, B verschieden sind, ist $v := B - A \neq 0$, d.h. dies ist in der Tat eine Gerade. Zudem erhalten wir für $\lambda = 0$ den Punkt A und für $\lambda = 1$ erhalten wir den Punkt B. Mit anderen Worten, A und B liegen in der Tat auf der Gerade. Wir haben also gezeigt, dass es *mindestens eine* Gerade gibt, welche durch A und B verläuft.
Wir müssen nun noch die *Eindeutigkeit* der Gerade zeigen. Es sei also

$$h \;=\; \{P + \lambda \cdot w \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

eine weitere Gerade, welche durch A und B verläuft. Wir müssen zeigen, dass $g = h$. Wir zeigen dies, indem wir zeigen, dass $g \subset h$ und $h \subset g$.
Wir beweisen zuerst, dass $g \subset h$. Wir müssen zeigen, dass jeder Punkt $Q \in g$ auch auf h liegt. Es sei also $Q = A + \lambda \cdot (B - A)$ ein Punkt auf g. Nachdem A und B auf h liegen gibt es $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $A = P + \mu \cdot w$ und $B = P + \nu \cdot w$. Dann gilt auch, dass

$$\begin{aligned} Q &= A + \lambda \cdot (B - A) \\ &= P + \mu \cdot v + \lambda \cdot (P + \nu \cdot v - (P + \mu \cdot v)) \\ &= P + (\mu + \lambda \cdot \nu - \lambda \cdot \mu) \cdot v \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass Q auf h liegt. Nachdem Q beliebig war gilt nun $g \subset h$. In der Übung werden wir zeigen, dass $h \subset g$. **q.e.d.**

Korollar 4.11. *Die Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ ist ein Modell der Inzidenzaxiome.*

Beweis. Nach Definition enthält jede Gerade mindestens zwei Punkte Axiom 4.2 ist also erfüllt. Nach obigem Satz ist auch Axiom 4.3 erfüllt. Trivialerweise ist auch Axiom 4.6 erfüllt. In der Tat enthält $\mathbb{R}^2$ unendlich (sogar überabzählbar) viele Punkte, die nicht kollinear sind. **q.e.d.**

Nun zurück zum Axiomensystem.

Lemma 4.12. *Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, in der die Axiome 4.2, 4.3 und 4.6 erfüllt sind. Stimmen zwei Geraden in $\mathcal{E}$ in wenigstens zwei verschiedenen Punkten überein, so müssen sie gleich sein.*

Beweis. Seien $g, h \subset \mathcal{E}$ zwei Geraden, und $A \neq B \in \mathcal{E}$ mit $A, B \in g$ und $A, B \in h$. Dann gibt es nach Axiom 4.3 eine eindeutige Gerade $g(A, B)$, die A und B enthält. Es folgt $g = g(A, B) = h$. **q.e.d.**

Daraus ergibt sich weiter:

Korollar 4.13. *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Wir können nun die erste nicht-triviale Aussage folgern.

Satz 4.14. *Es gibt in einer Ebene $\mathcal{E}$, in der die Axiome 4.2, 4.3 und 4.6 erfüllt sind, mindestens drei paarweise verschiedene Geraden.*

Beweis. Nach Axiom 4.6 gibt es drei paarweise verschiedene Punkte A, B, C, die nicht kollinear sind. Dann sind die Geraden (z.B. nach Korollar 4.13) $g(A, B)$, $g(A, C)$ und $g(B, C)$ paarweise verschieden. **q.e.d.**

Definition 4.15. Haben zwei Geraden g und h in einer Ebene $\mathcal{E}$, die die Inzidenzaxiome 4.2,4.3 und 4.6 erfüllt, genau einen Punkt A gemeinsam, so sagen wir sie *schneiden sich in* A. Wenn sie gleich sind, oder keinen gemeinsamen Punkt haben, nennt man sie *parallel*.

Nach Korollar 4.13 gibt es also drei verschiedene Möglichkeiten für zwei Geraden g und h in einer Ebene $\mathcal{E}$:

- g und h sind identisch und demnach parallel;
- g und h sind verschieden und parallel;
- g und h sind verschieden und schneiden sich in einem Punkt.

4.2 Anordnungsaxiome

Euklid benutzt immer wieder Annahmen über die Lage von Punkten, die er eigentlich nur aus der Anschauung heraus rechtfertigen kann. Um nun die Anschauung ganz aus dem Axiomensystem verbannen zu können, müssen wir einen weiteren primitiven Term einführen:

Primitiver Term 4.16. *Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, in der die Inzidenzaxiome 4.2,4.3 und 4.6 erfüllt sind. Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ besteht eine Relation $A - B - C$. Wir sagen dann: B* ***liegt zwischen*** *A* ***und*** *C.*

Axiom 4.17. *Gilt $A-B-C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.*

Axiom 4.18. *Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.*

Axiom 4.19. *Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau einer der drei folgende Fälle:*

$$A - B - C \qquad \text{oder} \qquad B - C - A \qquad \text{oder} \qquad C - A - B.$$

Bemerkung 4.20. Diese Axiome sind die Formulierungen anschaulicher Sachverhalte, die Euklid womöglich als überflüssig empfunden hätte, da sie recht simple sind.

Beispiel 4.21. Gehen wir zurück zur reellen Ebene $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$. Sei $g := \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade. Für drei Punkte $A_1 = P + \lambda_1 v$, $A_2 = P + \lambda_2 v$, $A_3 = P + \lambda_3 v$ auf g setzt man

$$A_1 - A_2 - A_3 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \qquad \text{oder} \qquad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3.$$

Man sieht leicht, daß diese Relation die Axiome 4.17,4.18 und 4.19 erfüllt. Damit ist die Widerspruchsfreiheit gesichert.

Definition 4.22. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenzaxiome 4.2,4.3 und 4.19, sowie die Anordnungsaxiome 4.17,4.18 und 4.19 erfüllt, und $A \neq B \in \mathcal{E}$.

(i) Die Teilmenge
$$\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\}$$
heißt *Strecke mit den Endpunkten A und B*

(ii) Die Teilmenge

$$\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - B - X\}$$

heißt *Strahl von A in Richtung B*.

Bemerkung 4.23. Anschaulich bedeutet die obige Definition, daß für $A \neq B$ die Strecke $\overline{AB}$ aus allen Punkten besteht, die auf der Gerade $g(A, B)$ zwischen A und B liegt, zusammen mit den Endpunkten.
Der Strahl $\overrightarrow{AB}$ besteht aus den Punkten die auf der Gerade $g(A, B)$ auf der Seite von A liegen, auf der auch B liegt.

Nun müssen wir noch zwei weitere Anordnungsaxiome einführen:

Axiom 4.24. *Für alle $A \neq B \in \mathcal{E}$ gibt es $C \in \mathcal{E}$ mit $A - B - C$.*

Bemerkung 4.25. Hier wird das Postulat 2 von Euklid über die Verlängerbarkeit von Strecken über einen Punkt hinaus präzisiert.

Axiom 4.26. *Seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ nicht-kollineare Punkte, und $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade, die keinen der Drei Punkte enthält. Ist $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$, so gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:*

$$\overline{AC} \cap g = \varnothing \qquad \textit{oder} \qquad \overline{BC} \cap g = \varnothing.$$

Bemerkung 4.27. Dieses Axiom wird auch Postulat von Pasch genannt. Es schließt eine echte Lücke im Euklidischen Axiomensystem. Anschaulich bedeutet es folgendes: Liegen die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten von g, so muß jeder weitere Punkt C entweder auf der gleichen Seite wie A oder auf der gleichen Seite wie B liegen.

Lemma 4.28. *Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenzaxiome 4.2, 4.3 und 4.6, sowie die Anordnungsaxiome 4.17, 4.18, 4.19, 4.24 und 4.26 erfüllt. Für $A \neq B \in \mathcal{E}$, enthält die Strecke $\overline{AB}$ unendlich viele Punkte.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\overline{AB}$ einen weiteren Punkt P enthält, so daß A, B, P paarweise verschieden sind. Rekursiv erhalten wir dann eine unendliche Folge P_i von paarweise verschiedenen Punkten zwischen A und B.
Nach Axiom 4.6 gibt es einen Punkt C', so daß A, B, C' nicht kollinear sind. Nach Axiom 4.24 gibt es einen Punkt C auf der Geraden $g(A, C')$, so daß C' zwischen A und C liegt. Wir wollen das Axiom 4.26 auf die nicht-kollinearen Punkte A, B, C anwenden. Weiter gibt es einen Punkt B' aud der Geraden $g(C, B)$, so daß B zwischen C und B' liegt. Betrachte die Gerade $g(C', B')$. Sie schneidet die Strecke $\overline{AC}$ in C', aber nicht die Strecke $\overline{CB}$, denn der Schnittpunkt von $g(C', B')$ und $g(C, B)$ ist B' und liegt nicht auf $\overline{CB}$. Nach Axiom 4.26 schneidet $g(C', B')$ also $\overline{AB}$ in einem Punkt P. Dieser ist der gewünschte Punkt zwischen A und B. **q.e.d.**

Definition 4.29. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und die Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade. Wir sagen, zwei Punkte A und B liegen auf der gleichen Seite von g, wenn $\overline{AB} \cap g = \varnothing$.

Satz 4.30. *Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt und $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade. Dann gibt es zwei Teilmengen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ von $\mathcal{E}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\mathcal{E} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup g$, das heißt $\mathcal{E} \backslash g$ zerfällt in $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$.

(ii) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \varnothing$*, das heißt* $\mathcal{H}_1$ *und* $\mathcal{H}_2$ *sind disjunkt.*

(iii) Alle Punkte in $\mathcal{H}_1$ *liegen auf der gleichen Seite von* g*.*

(iv) Alle Punkte in $\mathcal{H}_2$ *liegen aud der gleichen Seite von* g*.*

Beweis. Für zwei Punkte $A, B \in \mathcal{E}$ schreiben wir „$A \sim B$“, wenn A und B auf der gleichen Seite von g liegen. Wir zeigen, daß dies eine Äquivalenzrelation ist.

Reflexivität Offensichtlich gilt für jeden Punkt $A \notin g$, daß $A \sim A$.

Symmetrie Und natürlich gilt für zwei Punkte $A, B \in \mathcal{E}\backslash g$ auch $A \sim B$ genau dann, wenn $B \sim A$.

Transitivität Seien also $A, B, C \in \mathcal{E}\backslash g$, so daß A und B auf der gleichen Seite von g liegen (d.h. $g \cap \overline{AB} = \varnothing$), und B und C auf der gleichen Seite von g liegen (d.h. $g \cap \overline{BC} = \varnothing$). Zu zeigen ist, daß auch A und C auf der gleichen Seite von g liegen (d.h. $g \cap \overline{AC} = \varnothing$).

1. Fall Die Punkte A, B, C sind nicht kollinear. Nach Voraussetzung schneidet g weder $\overline{AB}$ noch $\overline{BC}$. Nach Axiom 4.26 schneidet g also auch nicht $\overline{AC}$.

2. Fall Die Punkte A, B, C sind kollinear, liegen also auf einer Geraden $h = g(A, B) = g(B, C) = g(A, C)$. Da $A, B, C \notin g$, ist $g \neq h$. Die Geraden g und h haben höchstens einen Schnittpunkt. Da jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält, gibt es $D \in g$ mit $D \notin h$. Wir finden nach Axiom 4.24 einen Punkt E, so daß A zwischen D und E liegt. Da $g(AD) \neq g$, und folgt $E \notin g$, und $\overline{EA} \cap g = \varnothing$, denn der eindeutige Schnittpunkt von $g(EA)$ mit g ist $D \notin \overline{EA}$. Also ist $E \sim A$. Da E nicht auf h liegt, sind die Punkte E, A, B nicht kollinear. Nach dem ersten Fall folgt aus $A \sim B$ und $A \sim E$ also $B \sim E$. Auch die Punkte E, B, C sind nicht kollinear. Damit folgt aus $B \sim E$ und $B \sim C$ also $E \sim C$. Auch die Punkte E, A, C sind nicht kollinear. Damit folgt aus $E \sim C$ und $E \sim A$ also endlich $A \sim C$.

Damit zerfällt $\mathcal{E}\backslash g$ in Äquivalenzklassen. Wir müssen noch die Anzahl bestimmen. Es gibt einen Punkt $A \notin g$ (Axiom 4.6) und einen Punkt $Q \in g$ (Axiom 4.2). Es gibt einen Punkt B, so daß Q zwischen A und B liegt (Axiom 4.24). Dann ist $\overline{AB} \cap g = \{Q\} \neq \varnothing$. Also $A \nsim B$. Somit gibt es mindestens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.
In der Übung zeigen wir, daß es genau zwei verschiedene Äquivlenzklassen gibt. Wir nennen diese $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$, und diese Mengen erfüllen genau die Anforderungen des Satzes.

q.e.d.

Definition 4.31. In der Situation oben bezeichnen wir $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ als Halbebenen bezüglich g.
Für $A \in \mathcal{E}\backslash g$ ist

$$\mathcal{H}(g, A) := \{X \in \mathcal{E}\backslash g \,|\, X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } g \text{ wie } A\}$$

nichts anderes als die Äquivalenzklasse von A bezüglich der oben betrachteten Äquivalenzrelation.
Ist also $A \in \mathcal{H}_i$, so ist $\mathcal{H}(g, A) = \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$.

Bemerkung 4.32. Wir können das gleiche mit Geraden machen:
Sei $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade, $O \in g$ ein Punkt. Wir sagen Punkte $A, B \in g\backslash\{O\}$ liegen auf der gleichen Seite von O, wenn O nicht zwischen A und B liegt.
Die Menge $g\backslash\{O\}$ zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen h_1, h_2, so daß alle Punkte in g_i

auf der gleichen Seite von O liegen, und die Punkte in g_1 nicht auf der gleichen Seite von O liegen wie die Punkte in g_2:
Da $\mathcal{E}$ mindestens drei nicht kollineare Punkte hat, finden wir $C \in \mathcal{E}\backslash g$. Die Gerade $g(O,C)$ schneidet g genau im Punkt O. Seien $\mathcal{H}_i$, $i = 1,2$ die Halbebenen von $\mathcal{E}$ bezüglich $g(A,B)$. Dann erfüllen $h_i = g \cap \mathcal{H}_i$, $i = 1,2$, die Voraussetzungen. Man nennt diese Halbgerade.
Wie oben ist „auf der gleichen Seite von O liegen“ eine Äquivalenzrelation. Für $A \in g\backslash\{O\}$ ist

$$h(O,A) := \{X \in g(O,A)\backslash\{O\} \,|\, X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } O \text{ wie } A\}$$

die Äquivalenzklasse von A bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Ist also $A \in h_i$, so ist $h(O,A) = h_i$, $i = 1,2$.
Es ist klar, daß $\overrightarrow{OA} = h(O,A) \cup \{O\}$. Insbesondere gilt für jeden Punkt $X \in \overrightarrow{OA}$, daß entweder

$$X = O \qquad \text{oder} \qquad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA}.$$

Wir sind nun in der Lage, Winkel und Dreiecke zu definieren.

Definition 4.33. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt und $O, A, B \in \mathcal{E}$ drei nicht kollineare Punkte.

(i) Wir definieren den *Winkel*

$$\sphericalangle_{AOB} := \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}.$$

Der Punkt O heißt *Scheitel* von $\sphericalangle_{AOB}$, die beiden Strahlen heißen *Schenkel.*

(ii) Sei $\alpha := \sphericalangle_{AOB}$. Man nennt

$$\mathcal{I}(\alpha) := \mathcal{H}(g(O,A),B) \cap \mathcal{H}(g(O,B),A)$$

das Innere des Winkels α.
Die Menge der Punkte, die weder auf α noch in $I(\alpha)$ liegen, also

$$\mathcal{A}(\alpha) := \mathcal{E}\backslash(\alpha \cup \mathcal{I}(\alpha)),$$

bezeichnet man als das Äußere des Winkels.

Bemerkung 4.34. Anschaulich bedeutet das, daß wir nur Winkel α mit $O^\circ < \alpha < 180^\circ$ betrachten (oder $0 < \alpha < \pi$).

Definition 4.35. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt und $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei nicht kollineare Punkte.

(i) Dann heißt

$$\triangle_{ABC} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

das *Dreieck* mit den Ecken A, B, C, mit den *Seiten* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, und mit den *Winkeln* $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$, $\beta = \sphericalangle_{ABC}$, $\gamma = \sphericalangle_{ACB}$.

(ii) Die Menge

$$\mathcal{I}(ABC) := \mathcal{I}(\alpha) \cap \mathcal{I}(\beta) \cap \mathcal{I}(\gamma)$$

nennt man das *Innere des Dreiecks.*
Die Menge

$$\mathcal{A}(ABC) := \mathcal{E}\backslash(\triangle_{ABC} \cup \mathcal{I}(ABC)) = \mathcal{A}(\alpha) \cup \mathcal{A}(\beta) \cup \mathcal{A}(\gamma)$$

bezeichnet man als das *Äußere des Dreiecks.*

Wir können nun das Axiom 4.26 folgendermaßen umformulieren:

Satz von Pasch 4.36. *Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks trifft, aber keine der Ecken, so trifft die Gerade notwendigerweise noch eine andere Seite des Dreiecks. Eine Gerade, die die Ecken eines Dreiecks nicht trifft, kann nicht gleichzeitig alle drei Seiten des Dreiecks treffen.*

Korollar 4.37. *Eine Gerade, die durch eine Ecke und einen inneren Punkt eines Dreiecks geht, schneidet die der Ecke gegenüberliegende Seite.*

Beweis. Gegeben sei das Dreieck $\triangle_{ABC}$ und ein Punkt $X \in \mathcal{I}(ABC)$. Betrachte die Gerade $g(C, X)$. Würde diese ein weiteres Element aus $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$ enthalten, so wäre $g(C, X) = g(C, A)$ oder $g(C, X) = g(C, B)$. In diesem Fall würde gelten $X \in g(C, A)$ oder $X \in g(C, B)$, was unmöglich ist, da beide keine Elemente aus dem Inneren $\mathcal{I}(ABC)$ enthalten. Der Punkt C ist also der eindeutige Schnittpunkt von $g(C, X)$ und $g(A, C)$, bzw. von $g(C, X)$ und $g(B, C)$.
Trifft nun $g(C, X)$ die gegenüberliegende Seite $\overline{AB}$, so sind wir fertig. Angenommen dies ist nicht der Fall. Wir führen einen Widersüruch herbei. Nach Axiom 4.24 können wir $\overline{BC}$ verlängern, und finden S mit $B - C - S$. Dann liegen B und S auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ und da $S \in g(B, C)$ ist S nicht im Inneren des Dreiecks.
Betrachte das neue Dreieck $\triangle_{ABS}$. Da $g(B, S) \cap g(C, X) = g(B, C) \cap g(C, X)$, trifft $g(C, X)$ die Seite $\overline{BS}$, aber keine Ecke. Nach Axiom 4.26 muß $g(C, X)$ noch eine weitere Seite des Dreiecks $\triangle_{ABS}$ schneiden, und da wir $\overline{AB}$ bereits ausgeschlossen hatten, muß $g(C, X)$ also $\overline{AS}$ schneiden.
Es gibt also Z mit $A - Z - S$ und $Z \in g(C, X)$, genauer $C - X - Z$. Da $g(S, A) \neq g(C, A)$ ist, treffen sich $g(S, A)$ und $g(C, A)$ nur im Punkte A. Wegen $S - Z - A$ liegen S und Z auf der gleichen Seite von $g(A, C)$ und damit Z im Äußeren von $\triangle_{ABC}$.
Weil nun Z und X auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ liegen, gibt es Y mit $\overline{ZX} \cap g(A, C) = \{Y\}$. Für diesen Schnittpunkt gilt also $Z - Y - X$. Aber da $g(Z, X) = g(C, X)$ und $g(C, X) \cap g(A, C) = \{C\}$, folgt $Y = C$. Also gilt $Z - C - X$ und $Z - X - C$, unmöglich nach Axiom 4.19. **q.e.d.**

Satz 4.38. *Sei $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und $P \in g(B, C)$. Dann ist $P \in \mathcal{I}(\alpha)$ genau dann, wenn P zwischen B und C ist.*

Beweis. Nach Definition ist $\mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{H}(g(A, B), C) \cap \mathcal{H}(g(A, C), B)$. Also ist $P \in \mathcal{I}(\alpha)$, genau dann, wenn

$$P \neq B, \qquad P \neq C, \qquad \text{nicht } P - C - B, \qquad \text{nicht } C - B - P.$$

Da $P \in g(BC)$ gilt dies genau dann, wenn $B - P - C$. **q.e.d.**

Bemerkung 4.39. Die Voraussetzung $P \in g(B, C)$ ist notwendig. In der Übung werden wir ein Beispiel betrachten, wo $P \in \mathcal{I}(\alpha)$, aber es keine Punkte $B' \in \overrightarrow{AB}$ und $C' \in \overrightarrow{AC}$ gibt, so daß $P \in \overline{B'C'}$.

Satz 4.40. *Sei $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und P ein Punkt, der nicht auf α liegt.*

(i) Ist $P \in \mathcal{I}(\alpha)$, so auch alle Punkte $X \neq A$ auf $\overrightarrow{AP}$.

(ii) Ist $P \in \mathcal{A}(\alpha)$, so auch alle Punkte $X \neq A$ auf $\overrightarrow{AP}$.

Beweis. Liegt P in $\mathcal{I}(\alpha)$, so ist $P \notin g(A,B) \cup g(A,C)$. Also ist

$$g(A,P) \cap g(A,B) = \{A\} = g(A,P) \cap g(A,C),$$

das heißt, der einzige Schnittpunkt von $g(A,P)$ mit $g(A,B)$ oder $g(A,C)$ ist A. Für $X \in \overrightarrow{AP}$, $X \neq A$, muß gelten $A - X - P$ oder $A - P - X$. Also liegen X und P auf der gleichen Seite von $g(A,B)$ und $g(A,C)$.
Sei nun $P \in \mathcal{A}(\alpha)$. Für $X \in \overrightarrow{AP}$ ist $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AP}$, und $C \notin g(A,B) \cup g(A,C)$. Wäre nun $X \in \mathcal{I}(\alpha)$, so würde nach dem gleichen Argument wie oben folgern, daß $P \in \mathcal{I}(\alpha)$. Widerspruch. Also ist $X \in \mathcal{A}(\alpha)$. **q.e.d.**

Korollar 4.41. *Sei $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und $P \in \mathcal{I}(\alpha)$. Dann liegen B und C auf verschiedenen Seiten von $g(A,P)$.*

Beweis. Betrachte das Dreieck $\triangle_{ABC}$ Die Gerade $g(A,P)$ geht durch die Ecke A des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ aber nicht durch B oder C. Wir machen eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $P \in \mathcal{I}(ABC)$. Dann schneidet $g(A,P)$ nach Korollar 4.37 die Seite $\overline{BC}$, und damit liegen B und C auf verschiedenen Seiten von $g(A,P)$.

2. Fall: $P \in \overline{BC}$. Dann liegt P zwischen B und C und somit liegen B und C auf verschiedenen Seiten von $g(A,P)$.

3. Fall: $P \in \mathcal{A}(ABC)$. Dann liegen A und P auf verschiedenen Seiten von $g(B,C)$, und es gibt einen Schnittpunkt $\overrightarrow{AP} \cap g(B,C) =: X$. Nach dem vorherigen Satz ist dann auch $X \in \mathcal{I}(\alpha)$ und daher $B - X - C$. Wie zuvor folgern wir daß B und C auf verschiedenen Seiten von $g(A,P)$ liegen.

q.e.d.

Satz 4.42. *Sei $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und D ein weitere Punkt in $\mathcal{E}$, sowie $\alpha_- := \sphericalangle_{BAD}$ und $\alpha_+ \sphericalangle_{DAC}$. Dann ist $D \in \mathcal{I}(\alpha)$, genau dann, wenn $C \in \mathcal{A}(\alpha_-)$ und $B \in \mathcal{A}(\alpha_+)$.*

Beweis. Übung. **q.e.d.**

4.3 Bewegungsaxiome

Wir müssen nun eine exakte Formulierung für Euklids vage Vorstellungen von „zur Deckung bringen“ finden. Dies wird uns auf den Begriff der Kongruenz führen. Anschaulich überlegt man sich leicht, daß wir folgende Möglichkeiten haben: Verschieben/Translation, Drehen/Rotation, Spiegelung/Reflektion):
Seien A, B, C drei gegebene Punkte, und A', B' zwei weitere Punkte. Wir können einen Punkt A so verschieben, daß er über dem Punkt A' zu liegen kommt. Als nächstes haben wir die Möglichkeit, die Strecke $\overline{AB}$ um A zu drehen, bis B auf dem Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ liegt. Nun können wir noch an der Geraden $g(A', B')$ spiegeln, so daß C in einer gewünschten Halbgeraden liegt.

Primitiver Term 4.43. *Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenzaxiome 4.2, 4.3, 4.6 und die Anordnungsaxiome 4.17, 4.18, 4.19, 4.24, 4.26 erfüllt. Um obiges gewährleisten zu können fordern wir die Existenz gewisser Abbildungen von $\mathcal{E}$, die wir Bewegungen nennen.*

Axiom 4.44. *Die Menge $\mathcal{B}$ aller Bewegungen bilden eine Gruppe.*

Insbesondere ist die Identität eine Bewegung, und jede Bewegung hat ein Inverses.

Axiom 4.45. *Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.*

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden ab, und erhalten die Anordnung auf den Geraden. Es folgt, daß dann auch Strecken auf Strecken und Strahlen auf Strahlen abgebildet werden, denn diese Mengen wurden mit Hilfe der Zwischenrelation definiert.

Axiom 4.46. *Es seien A, B, C und O, P, Q jeweils drei nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ, so daß:*

$$\varphi(A) = O, \qquad \varphi(B) \in \overrightarrow{OP}, \qquad \varphi(C) \in \mathcal{H}(g(O,P), Q).$$

Bemerkung 4.47. Eine gewählte Konstellation von Punkten wie oben induziert eine eindeutige Bewegung. Andererseits kann eine Bewegung von verschiedenen Punktekonstellationen induziert sein.

Insbesondere das letzte Axiom ist von der (anschaulich klaren) Beschreibung von Translationen, Rotationen und Reflektionen motiviert.

Definition 4.48. Eine Spiegelung/Reflektion ist eine Bewegung, die induziert ist von einer Punktekonstellation A, B, C, O, P, Q die folgende Bedingungen erfüllt:

- $A = O$.
- $P \in \overrightarrow{AB}$.
- Die Punkte C und Q liegen auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$.

Man nennt dies die **Spiegelung** an der Geraden $g(A.B)$.

Satz 4.49. *Sei σ_g eine Spiegelung an der Geraden $g = g(A, B)$ induziert durch die Punktekonstellation A, B, C, O, P, Q wie oben beschrieben. Dann gilt:*

(i) Für alle $X \in \mathcal{E}\backslash g$ liegen X und $\sigma_g(X)$ auf verschiedenen Seiten von g.

(ii) Es ist $\sigma_g \circ \sigma_g = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

(iii) Für alle $X \in g$ ist $\sigma_g(X) = X$.

Beweis. **(i)** Seien $\mathcal{H}(g, C)$ und $\mathcal{H}(g, Q)$ die Halbebenen definiert durch g. Nach Definition ist klar, daß $C \in \mathcal{H}(g, C)$ und $\sigma_g(C) \in \mathcal{H}(g, Q)$ auf verschiedenen Seiten von g liegen. Sei also $C \neq X \in \mathcal{H}(g, C)$. Dann ist $\overline{CX} \cap g = \varnothing$. Wir müßen zeigen, daß $\sigma_g(X) \in \mathcal{H}(g, Q)$. Angenommen, $\sigma_g(X) \in \mathcal{H}(g, C)$. Da $\sigma_g(C) \in \mathcal{H}(g, Q)$ gilt $\overline{\sigma_g(C)\sigma_g(X)} \cap g \neq \varnothing$. Also gibt es $Y' \in g$ mit $\sigma_g(C) - Y' - \sigma_g(X)$. Da σ_g als Bewegung invertierbar ist können wir σ_g^{-1} darauf anwenden und erhalten die Anordnung $C - \sigma_g^{-1}(Y') - X$. Da σ_g^{-1} als Inverses von σ_g die Gerade g auf sich selbst abbildet, ist $Y := \sigma_g^{-1}(Y') \in g$, das heißt $\overline{CX} \cap g = \{Y\}$, Widerspruch. Also muß $\sigma_g(X) \in \mathcal{H}(g, Q)$ sein.
Da jedes $X \in \mathcal{H}(g, C)$ nach $\mathcal{H}(g, Q)$ abgebildet wird, und g auf sich selbst abgebildet wird, muß es $D \in \mathcal{H}(g, Q)$ geben, mit $\sigma_g(D) \in \mathcal{H}(g, C)$. Wir können nun das Argument von gerade mit D anstelle von C (und C anstelle von Q) wiederholen, um zu zeigen, daß jedes $X \in \mathcal{H}(g, Q)$ nach $\mathcal{H}(g, C)$ abgebildet wird.

(ii) Da die Bewegungen eine Gruppe bilden, ist $\sigma_g \circ \sigma_g$ wieder eine Bewegung. Sie läßt A fest, sendet B auf $\overrightarrow{AB}$ und $\mathcal{H}(g, C)$ nach $\mathcal{H}(g, C)$. Das tut auch die Identität. Aber nach Axiom 4.46 gibt es nur eine Bewegung, die das tut. Also ist $\sigma_g \circ \sigma_g = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

(iii) Wir müßen zeigen, daß $\sigma_g|_g = \mathrm{id}_g$. Angenommen, es gibt $X \in g$ mit $\sigma_g(X) \neq X$. Dann ist

$$\sigma_g(\sigma_g(X)) = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}(X) = X,$$

σ_g vertauscht also X und $\sigma_g(X)$. Da σ_g den Strahl $\overrightarrow{AB}$ auf sich selbst abbildet, muß $\sigma_g(X)$ auf der gleichen Seite von A liegen wie X. Es gibt also zwei Möglichkeiten:
1. Fall: Ist $A - X - \sigma_g(X)$, so ergibt nochmaliges Anwenden von σ_g, daß $\sigma_g(A) - \sigma_g(X) - \sigma_g(\sigma_g(X)) = A - \sigma_g(X) - X$. Beides ist aber gleichzeitig nicht möglich.
2. Fall: Ist $A - \sigma_g(X) - X$, so ergibt nochmaliges Anwenden von σ_g, daß $\sigma_g(A) - \sigma_g(\sigma_g(X)) - \sigma_g(X) = A - X - \sigma_g(X)$. Beides ist aber gleichzeitig nicht möglich.
Somit war die Annahme falsch, und es muß gleten $\sigma_g(X) = X$. **q.e.d.**

Beispiel 4.50. Im $\mathbb{R}^2$ können wir die Spiegelung anschaulich beschreiben. Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $X \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt. Dann erhält man das Spiegelbild $\sigma_g(X)$ in drei Schritten:

(i) Es sei h die eindeutig bestimmte Gerade durch X senkrecht auf g.

(ii) Sei Q der Lotfußpunkt - dieser kann gleich X sein, falls $X \in g$.

(iii) Dann ist $\sigma_g(X)$ gegeben durch $X + 2(Q - X) = Q + (Q - X)$.

Ist $X \in g$, also $X = Q$, so ist damit natürlich $\sigma_g(Q) = Q$. Ist $X \notin g$, so ist klar, daß $X, Q, \sigma_g(X)$ auf einer Geraden (nämlich h) liegen, und daß Q zwischen X und $\sigma_g(X)$ liegt. Anschaulich ist auch klar, daß X und $\sigma_g(X)$ von Q den gleichen Abstand haben. Aber da wir den Abstand noch nicht definiert haben, gehen wir hier nicht näher darauf ein.

Man kann die Bewegungen an Hand von ihren Fixpunktmengen charakterisieren.

Definition 4.51. Sei $\varphi \in \mathcal{B}$ eine Bewegung der Ebene $\mathcal{E}$. Dann nennt man

$$\mathrm{Fix}\,(\varphi) := \{X \in \mathcal{E} \mid \varphi(X) = X\}$$

die *Menge der Fixpunkte von* φ.

Oben haben wir gesehen, daß eine Spiegelung eine Bewegung ist, die eine Gerade g punktweise festläßt und die durch g bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht.

Korollar 4.52. *Eine Spiegelung ist eine Bewegung σ, so daß es eine Gerade g gibt, mit* $\mathrm{Fix}\,(\sigma) = g$, *und so daß es für alle $X \in \mathcal{E} \backslash g$ ein Element $P \in g$ gibt, mit $X - P - \sigma(X)$.*

Proposition 4.53. *Sei $\varphi \in \mathcal{B}$ eine Bewegung. Wenn* $\mathrm{Fix}\,(\varphi)$ *mindestens zwei verschiedene Punkte $A \neq B$ enthält, so ist φ entweder die Identität oder die Spiegelung an der Geraden $g(A, B)$.*

Beweis. Da jede Bewegung Geraden auf Geraden abbildet, ist $\varphi(g(A, B)) = g(A, B)$. Weil A und B Fixpunkte sind (und Anordnungen erhalten werden), sogar $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$. Sei P ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt (das heißt, A, B, P sind nicht kollinear) und $Q := \varphi(P)$. Dann gibt es (nach Axiom 4.46) genau eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = A$, $\psi(B) \in \overrightarrow{AB}$ und $\psi(P) \in \mathcal{H}(g(A, B), Q)$. Ist $\mathcal{H}(g(A, B), Q) = \mathcal{H}(g(A, B), P)$, so ist dies die Identität, andernfalls die Spiegelung an $g(A, B)$. Und φ hat genau diese Eigenschaften. **q.e.d.**

Nun können wir also die Bewegungen betrachten, die einen oder gar keinen Fixpunkt haben.

Definition 4.54. Eine Bewegung $\rho \in \mathcal{B}$ heißt *Drehung*, wenn sie genau einen Fixpunkt hat.

Bemerkung 4.55. Wir können dies auch mit Hilfe einer Punktekonstellation A, B, C, O, P, Q definieren, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $A = O$.
- Der Punkt C liegt im Inneren des Winkels $\sphericalangle_{BAP}$.
- Der Punkt Q liegt nicht auf der gleichen Seite von $g(A, P)$ wie C.

Man nennt dies eine *Drehung* um den Punkt A um den Winkel $\sphericalangle_{BAP}$.

Beispiel 4.56. Wieder beschreiben wir Drehungen im $\mathbb{R}^2$ anschaulich. Seien $P, X, Y \in \mathbb{R}^2$ drei nicht kollineare Punkte, und $\alpha = \sphericalangle_{XPY}$. Die Drehung um P mit Winkel α ist die eindeutige Bewegung, die charakterisiert ist durch

(i) $\rho_\alpha(P) = P$.

(ii) $\rho_\alpha(\overrightarrow{PX}) = \overrightarrow{PY}$.

(iii) Die Strahlen $\overrightarrow{PX}$ und $\rho_\alpha(\overrightarrow{PY})$ liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden $g(P, Y)$.

Drei nicht kollineare Punkte induzieren also eine eindeutige Drehung.

Nun bleiben also noch die Bewegungen ohne Fixpunkte.

Definition 4.57. Eine Bewegung τ heißt *Verschiebung*, falls eine Gerade g existiert, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind: $\tau(g) = g$, und für jede Gerade g', die nicht parallel zu g ist, ist $\tau(g') \cap g' = \varnothing$.

Bemerkung 4.58. Wir können dies auch mit Hilfe einer Punktekonstellation A, B, C, O, P, Q definieren, die folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Geraden $g(A, B) = g(O, P)$.
- Es gilt $A - B - O$ und $B - O - P$.
- Die Punkte Q und C liegen auf der gleichen Seite von $g(A, B)$.

Man nennt dies die **Verschiebung** um $\overline{AQ}$ in Richtung $\overrightarrow{AQ}$.

Proposition 4.59. *Ist $\tau \in \mathcal{B}$ eine Verschiebung, so gilt*

(i) $\operatorname{Fix}(\tau) = \varnothing$.

(ii) Für alle $X \in \mathcal{E}$ gilt $X - \tau(X) - \tau^2(X)$.

Beweis. Übung. **q.e.d.**

Beispiel 4.60. Im $\mathbb{R}^2$ kann man Verschiebungen wie folgt beschreiben. Sei $v \in \mathbb{R}^2$. Die Abbildung

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad X \mapsto X + v$$

heißt Verschiebung um v. Nach dieser Definition ist klar, daß für jede Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$, g parallel zu $\tau_v(g)$ ist.

Bemerkung 4.61. Man kann zeigen, daß alle Bewegungen sich aus Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen zusammensetzen lassen.

Wir können nun den Begriff der Kongruenz einführen.

Definition 4.62. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenzaxiome 4.2, 4.3, 4.6, die Anordnungsaxiome 4.17, 4.18, 4.19, 4.24, 4.26 und die bisher eingeführten Bewegungsaxiome 4.44, 4.45, 4.46 erfüllt. Zwei geometrische Figuren $\mathscr{F}, \mathscr{F}' \subset \mathcal{E}$ heißen *kongruent*, falls es eine Bewegung $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ gibt mit $\varphi(\mathscr{F}) = \mathscr{F}'$.
Wir schreiben dann $\mathscr{F} \mathrel{\widehat{=}} \mathscr{F}'$.

Lemma 4.63. *Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Wir müssen die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation zeigen. Diese folgen direkt aus den Gruppeneigenschaften von $\mathcal{B}$:
Reflexivität: Natürlich ist jede Figur $\mathscr{F}$ zu sich selbst kongruent, denn mit der Identität gilt $\mathrm{id}\,(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$.
Symmetrie: Sei $\mathscr{F}$ kongruent zu $\mathscr{F}'$. Das heißt, es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(\mathscr{F}) = \mathscr{F}'$. Da $\mathcal{B}$ eine Gruppe ist, hat φ ein Inverses. Für dieses gilt dann $\varphi^{-1}(\mathscr{F}') = \mathscr{F}$. Also ist $\mathscr{F}'$ auch kongruent zu $\mathscr{F}$.
Transitivität: Sei $\mathscr{F}$ kongruent zu $\mathscr{F}'$ und $\mathscr{F}'$ kongruent zu $\mathscr{F}''$. Dann gibt es $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $\varphi(\mathscr{F}) = \mathscr{F}'$ und $\psi \in \mathcal{B}$ mit $\psi(\mathscr{F}') = \mathscr{F}''$. Da $\mathcal{B}$ eine Gruppe ist, ist $\psi \circ \varphi$ ebenfalls eine Bewegung, und es gilt $\psi \circ \varphi(\mathscr{F}) = \psi(\varphi(\mathscr{F})) = \psi(\mathscr{F}') = \mathscr{F}''$. Also ist $\mathscr{F}$ kongruent zu $\mathscr{F}''$. **q.e.d.**

Bemerkung 4.64. Die Transitivität entspricht dem Axiom (A1) von Euklid:
„Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.“

Proposition 4.65. *Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung $\varphi \in \mathcal{B}$ gibt mit*

$$\varphi(A) = C \text{ und } \varphi(B) = D \qquad \text{oder} \qquad \varphi(A) = D \text{ und } \varphi(B) = C.$$

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, daß jede Bewegung bijektiv ist, und die Zwischenrelation respektiert. **q.e.d.**

Wir wissen bereits nach Axiom 4.46, daß je zwei Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kongruent sind vermöge einer Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$. Die nächste Proposition zeigt, daß dies die einzige Möglichkeit ist.

Proposition 4.66. *Sind die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kongruent vermöge einer Bewegung φ, so ist auf jeden Fall $\varphi(A) = C$.*

Beweis. Wir nehmen an, es wäre $\varphi(A) \neq C$. dann muß es ein $A \neq Y \in \overrightarrow{AB}$ geben mit $\varphi(Y) = C$. Für jedes $X \in \overrightarrow{AB}$ mit $A - Y - X$ ist dann

$$(\varphi(A) - \varphi(Y) - \varphi(X)) \;=\; (\varphi(A) - C - \varphi(X))$$

auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$. Doch das ist nach der Definition von $\overrightarrow{CD}$ nicht möglich. **q.e.d.**

Wir konnten mit den bisherigen Axiomen nicht beweisen, daß es, wenn $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$, eine Bewegung φ gibt mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$. Unsere Anschauung sagt uns jedoch, daß das der Fall sein sollte. Wir bräuchten ja notfalls nur die Strecke $\overline{CD}$ um $180° \mathrel{\widehat{=}} \pi$ zu drehen. Es ist daher Zeit für ein weiteres Bewegungsaxiom.

Axiom 4.67. *Zu je zwei Punkten $A \neq B \in \mathcal{E}$ gibt es eine Bewegung $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.*

Jetzt folgt aus der Proposition 4.65 direkt das

Korollar 4.68. *Ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.*

Bemerkung 4.69. Man kann sogar noch mehr sagen: Ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$ so ist nach der Wahl, daß A nach C abgebildet werden soll, schon festgelegt welcher Punkt wohin abgebildet wird, unabhängig von der gewählten Bewegung.

Wir kommen nun zum Abtragen von Strecken.

Satz 4.70. *Seien eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} = \overline{OQ}$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz eines Punktes $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} = \overline{OQ}$. Nach Axiom 4.46 existiert eine Bewegung $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $\varphi(A) = O$ und $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$. Setzt man $Q := \varphi(B)$, so ist $\overline{AB} = \overline{OQ}$.
Zeigen wir nun die Eindeutigkeit dieses Punktes. Angenommen, es gebe einen weiteren Punkt $Q' \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} = \overline{OQ'}$. Nach Axiom 4.67 gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = O$ d $\varphi(B) = Q$, und eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = O$ und $\psi(B) = Q'$. Da die Bewegungen eine Gruppe bilden, ist auch $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine Bewegung, und es gilt

$$\psi \circ \varphi^{-1}(O) = O \qquad \text{und} \qquad \psi \circ \varphi^{-1}(Q) = Q'.$$

Die Bewegung $\psi \circ \varphi^{-1}$ bildet also die Gerade $g(O, P) = g(O, Q) = g(O, Q')$ auf sich selbst ab und es gibt die folgenden zwei Möglichkeiten:

- Bildet $\psi \circ \varphi^{-1}$ einen Punkt $R \in \mathcal{E} \backslash g(O, P)$ auf einen Punkt der gleichen Halbebene ab, so muß wegen der Eindeutigkeit aus Axiom 4.46 $\psi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$, also $\varphi = \psi$ und damit $Q = Q'$.
- Bildet $\psi \circ \varphi^{-1}$ einen Punkt $R \in \mathcal{E} \backslash g(O, P)$ auf einen Punkt der anderen Halbebene ab, so muß wegen der Eindeutigkeit aus Axiom 4.46 $\psi \circ \varphi^{-1}$ die Spiegelung an $g(O, P)$ sein. Diese läßt die Gerade $g(O, P)$ punktweise fest. Wieder folgt $Q = Q'$.

Also bilden alle Bewegungen, die A auf O und B auf einen Punkt von $\overrightarrow{OP}$ abbilden, B auf den gleichen Punkt ab. **q.e.d.**

Bemerkung 4.71. Dieser Satz ist recht wichtig, und wir werden bald sehen, daß er etwas mit Euklids Vorstellungen von Kreisen und mit seinem Postulat (P3) zu tun hat.

Zuvor müßen wir jedoch auf den Vergleich und die Addition von Strecken eingehen.

Korollar 4.72. *Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben, so gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{CD}$ mit $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CQ}$, und es muß genau eine der folgenden Aussagen zutreffen:*

(i) Es ist $Q = D$, dann ist $\overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CD}$.

(ii) Es ist $C - Q - D$. Dann schreiben wir $\overline{AB} < \overline{CD}$.

(iii) Es ist $C - D - Q$. Dann schreiben wir $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Bemerkung 4.73. Das entspricht genau Euklids Vorstellung vom Vergleich zweier Strecken. „Das Ganze ist größer als der Teil.“ nach seinem Axiom (A5).

Der Vollständigkeit halber definieren wir noch:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \leqslant \overline{CD} \quad &:\Leftrightarrow \quad \overline{AB} < \overline{CD} \text{ oder } \overline{AB} \,\widehat{=}\, \overline{CD}, \\ \overline{AB} \geqslant \overline{CD} \quad &:\Leftrightarrow \quad \overline{AB} > \overline{CD} \text{ oder } \overline{AB} \,\widehat{=}\, \overline{CD}. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zur Addition und Subtraktion von Strecken.

Satz 4.74. *Seien in der Ebene $\mathcal{E}$ Punkte mit $A - B - C$ und $A' - B' - C'$ gegeben.*

(i) Ist $\overline{AB} \,\widehat{=}\, \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \,\widehat{=}\, \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \,\widehat{=}\, \overline{A'C'}$.

(ii) Ist $\overline{AC} \,\widehat{=}\, \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \,\widehat{=}\, \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AB} \,\widehat{=}\, \overline{A'B'}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst (i). Nach Voraussetzung gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Dann gilt aber

$$A' - B' - \varphi(C) \qquad \text{und} \qquad A' - B' - C'.$$

Also liegen $\varphi(C)$ und C' auf der gleichen Seite von B', in anderen Worten

$$\varphi(C) \in \overrightarrow{B'C'}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\overline{BC} \,\widehat{=}\, \overline{B'C'}$. Außerdem ist, da φ eine Bewegung ist, auch $\overline{BC} \,\widehat{=}\, \overline{\varphi(B)\varphi(C)} = \overline{B'\varphi(C)}$. Also muß nach dem Satz über das Abtragen von Strecken (genauer nach der dort gezeigten Eindeutigkeit) $\varphi(C) = C'$. Also ist auch $\overline{AC} \,\widehat{=}\, \overline{A', C'}$.
Zeigen wir nun (ii). Ist $\overline{AC} \,\widehat{=}\, \overline{A'C'}$, so gibt es eine Bewegung mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(C) = C'$. Da die Werte von φ auf allen Zwischenpunkten eindeutig festgelegt sind, muß auch $\varphi(B) = B'$ sein. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Ähnlich wie die Kongruenz für Stecken verhält es sich mit der Kongruenz von Winkeln.

Satz 4.75. *Zwei Winkel $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und $\beta = \sphericalangle_{EDF}$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit*

$$\varphi(A) = D, \qquad \varphi(B) \in \overrightarrow{DE}, \qquad \varphi(C) = \overrightarrow{DF}$$

oder eine Bewegung ψ mit

$$\psi(A) = D, \qquad \psi(B) \in \overrightarrow{DF}, \qquad \psi(C) \in \overrightarrow{DE}$$

gibt.

Beweis. Gibt es eine Bewegung wie beschrieben, so ist klar, daß die Winkel α und β kongruent sind.
Ist andererseits $\alpha \,\widehat{=}\, \beta$ vermöge einer Bewegung φ. Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X \in \overrightarrow{AB}$ mit $X \neq A$ und $\varphi(X) = D$. (Der Fall $X \in \overrightarrow{AC}$ wird analog behandelt.)
Wir wählen E mit $A - X - E$. Dann gehört E auch zu $\overrightarrow{AB}$ und es ist

$$[\varphi(A) - \varphi(X) - \varphi(E)] = [\varphi(A) - D - \varphi(E)].$$

Also liegen $\varphi(A)$ und $\varphi(E)$ weder beide in $\overrightarrow{DE}$ noch beide in $\overrightarrow{DF}$. Aber sie liegen beide auf einer Geraden durch D. Unmöglich!
Wir wissen somit, daß $\varphi(A) = D$. Liegt $\varphi(B)$ in $\overrightarrow{DE}$ so muß $\varphi(C)$ in $\overrightarrow{DF}$ liegen und umgekehrt. **q.e.d.**

Die Situation ist so ähnlich wie bei der Kongruenz von Strecken: Um zeigen zu können, daß es ein φ mit

$$\varphi(A) = D, \qquad \varphi(B) \in \overrightarrow{DE}, \qquad \varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$$

gibt, brauchen wir ein weiteres Bewegungsaxiom.

Axiom 4.76. *Zu jedem Winkel $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$.*

Damit sind die Bewegungsaxiome vollständig.

4.4 Aufgaben

Aufgabe 4.1. Zeige, daß das Beispiel 4.8 ein Modell der Inzidenzaxiome ist.

Aufgabe 4.2. Es seien A, B zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Gerade

$$g \ := \ \{A + \lambda \cdot (B - A) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Es sei zudem

$$h \ = \ \{Q + \lambda \cdot w \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

noch eine weitere Gerade, welche durch A und B verläuft. Zeige, daß $h \subset g$.
***Hinweis**: Es muß also gezeigt werden, dass ein beliebiger Punkt $Q + \lambda \cdot w \in h$ auch schon in g liegt.*

Aufgabe 4.3. Wir betrachten die rationale Ebene $\mathbb{Q}^2$.

(i) Gib eine geeignete Definition von Geraden in $\mathbb{Q}^2$ an.

(ii) Zeige, daß damit $\mathbb{Q}^2$ ein Modell der Inzidenzaxiome ist.

Aufgabe 4.4. Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene, und $A \neq B \in \mathbb{E}$. Wie könnte man mit etwas linearer Algebra die Strecke $\overline{AB}$ und den Strahl $\overrightarrow{AB}$ beschreiben?

Aufgabe 4.5. Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene, und $A \neq B \in \mathbb{E}$. Zeige:

(i) $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset g(A, B)$.

(ii) $\overline{AB} = \overline{BA}$.

(iii) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

(iv) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = g(A, B)$.

Gilt dies für alle Ebenen $\mathcal{E}$, die die Axiome 4.17,4.18 und 4.19 erfüllen?

Aufgabe 4.6. Sei $g := \{Q + \lambda v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Wie könnte man die Mengen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ aus Satz 4.30 mit etwas linearer Algebra beschreiben, und vielleicht die Aussage sogar beweisen?

Aufgabe 4.7. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschiedene Punkte. Wie könnte man folgende Objekte mit etwas linearer Algebra beschreiben:

(i) den Winkel $\alpha := \sphericalangle_{BAC}$?

(ii) das Innere $\mathcal{I}(\alpha)$ des Winkels α?

(iii) das Dreieck $\triangle_{ABC}$?

(iv) das Innere $\mathcal{I}(ABC)$ dieses Dreiecks?

Aufgabe 4.8. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade. Im Beweis von Satz 4.30 haben wir gesehen, daß dies eine Äquivalenzrelation induziert. Seien $A \nsim B$ und C ein weiterer Punkt. Zeige, daß $C \sim A$ oder $C \sim B$.

Aufgabe 4.9. Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene, und $A \neq B \in \mathbb{E}$. Zeige, daß die Strecke $\overline{AB}$ unendlich viele Punkte enthält, und zeichne ein entsprechendes Bild.

Aufgabe 4.10. Das Ziel dieser Aufgabe ist es das Axiom 4.24 für die reelle Ebene zu zeigen:
Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Zeige, daß es $C \in \mathbb{R}^2$ gibt, so daß $A-B-C$.
Hinweis: *Gib eine mathematische Beschreibung der Geraden $g(A,B)$ an und benutze dies um einen Punkt C anzugeben, der auf $g(A,B)$ liegt, so daß B zwischen A und C liegt.*

Aufgabe 4.11. Sei $\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(i) Erstelle eine Skizze von $\mathcal{D}$.

(ii) Die Geraden von $\mathcal{D}$ seien die Abschnitte von gewöhnlichen Geraden g in $\mathbb{R}^2$, die innerhalb von $\mathcal{D}$ liegen. Gib eine mathematische Beschreibung dieser Geraden an.

(iii) Zeige, daß $\mathcal{D}$ mit diesen Geraden die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt.

(iv) Trage in der Skizze einen Winkel ein, und einen Punkt im Inneren des Winkels, so daß dieser Punkt auf keiner Strecke zwischen zwei Punkten auf den beiden Schenkeln liegt.

Aufgabe 4.12. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und D ein weitere Punkt in $\mathcal{E}$, sowie $\alpha_- := \sphericalangle_{BAD}$ und $\alpha_+ \sphericalangle_{DAC}$. Zeige:

$$D \in \mathcal{I}(\alpha) \qquad :\Leftrightarrow \qquad C \in \mathcal{A}(\alpha_-) \text{ und } B \in \mathcal{A}(\alpha_+).$$

Hinweis: *Fertige eine Skizze an, die die Situation illustriert. Überlege Dir, daß falls $D \in \mathcal{I}(\alpha)$ der Schnittpunkt von $g(A,D)$ und $g(B,C)$ auch in $\mathcal{I}(\alpha)$ liegt.*

Aufgabe 4.13. Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Wir bezeichnen mit $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an g.

(i) Vervollständige den folgenden Satz:
Für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gilt $\sigma_g(P) = P$ genau dann, wenn ….

(ii) Sei $h \subset \mathbb{R}^2$ eine weitere Gerade, die parallel zu g verläuft. Zeige, daß $\sigma_g(h)$ ebenfalls parallel zu g verläuft.

Aufgabe 4.14. Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$.

(i) Sei g gegeben durch $g = \{P + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
Was ist der Vektor einer Geraden, die senkrecht auf g steht?

(ii) Wir betrachten die Gerade

$$g := \{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Was ist die Spiegelung von $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an g?

Aufgabe 4.15. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt.

(i) Gib eine (geometrische) Definition der Punktspiegelung σ_P an P an.

(ii) Kann man eine Punktspiegelung mit Hilfe von Spiegelungen, Drehungen, Translationen beschreiben?

(iii) Zeige: Für jede Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ ist $\sigma_P(g)$ parallel zu g.

Aufgabe 4.16. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt. Zeige, daß für jede Verschiebung $\tau \in \mathcal{B}$ gilt $\operatorname{Fix}(\tau) = \varnothing$.

Aufgabe 4.17. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt. Zeige, daß für jede Verschiebung $\tau \in \mathcal{B}$ gilt $X - \tau(X) - \tau^2(X)$ für alle $X \in \mathcal{E}$.

Aufgabe 4.18. Seien $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^2$.

(i) Gib eine Verschiebung, eine Drehung und eine Spiegelung an, die P in Q überführen.

(ii) Welche von diesen drei Bewegungen sind eindeutig?

(iii) Wie könnte man die drei Bewegungen für beliebige Punkte $P \neq Q$ in $\mathbb{R}^2$ beschreiben?

Aufgabe 4.19. Wir betrachten Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$. Die Verknüpfung von zwei Verschiebungen ist natürlich wiederum eine Verschiebung.

(i) Ist die Verknüpfung von zwei Drehungen wieder eine Drehung? Die Drehungen können dabei um zwei verschiedenen Punkte erfolgen.
(Kein Beweis erforderlich, wir schauen uns das später nochmal genauer an.)

(ii) Was kann man über die Verknüpfung von zwei Spiegelungen entlang von zwei Geraden g und h sagen? Ist dies wiederum eine Spiegelung? Oder eine andere Art von Bewegung?
Hinweis: *Betrachte drei Fälle: g und h schneiden sich, g und h sind parallel und verschieden, g und h sind identisch.*

Aufgabe 4.20. Es sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, σ_g die dadurch induzierte Spiegelung und ρ eine Drehung um einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$. Genau wann ist die Verknüpfung $\sigma_g \circ \rho$ wieder eine Spiegelung?
(Kein Beweis erforderlich.)

Aufgabe 4.21. Sei $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung in $\mathbb{R}^2$ und $\rho \neq \mathrm{id}$ eine Drehung. Zeige, daß dann gilt $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.
Hinweis: *Man kann benutzen, daß Verschiebungen keine Fixpunkte und Drehungen genau einen Fixpunkt haben.*

Aufgabe 4.22. Was sind die Fixpunktmengen einer Spiegelung, einer Drehung und einer Verschiebung?

Aufgabe 4.23. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$. Für welche n ist ein n-Eck schon durch die Exkpunkte festgelegt? Überlege, warum das so ist, beziehungsweise gib ein Gegenbeispiel, wenn es nicht so ist.

Aufgabe 4.24. Es seine $P \neq Q \in \mathbb{R}^2$. Beschreibe die folgenden Objekte:

(i) der Richtungsvektor von P nach Q;

(ii) die Gerade, die durch P, Q definiert ist;

(iii) der Strahl, der in P beginnt und durch Q läuft;

(iv) der Strahl, der in Q beginnt und durch P läuft;

(v) die Strecke zwischen P und Q;

(vi) die Länge der Strecke zwischen P und Q.

Aufgabe 4.25. Seien nun $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Objekte der vorherigen Aufgabe in diesem konkreten Fall.

5 Geometrie in der reellen Ebene

Wir haben uns nun schon einen Großteil der axiomatischen Grundlagen der euklidischen Geometrie erarbeitet. Wie es sich herausstellt, kann man damit bereits einen Großteil der klassischen Ergebnisse verstehen und beweisen. Ganz im Sinne von Euklid, der auch eine sehr konkrete Vorstellung von Geometrie hatte, wollen wir dies anhand der reellen Ebene tun. Dies ist möglich, da, wie wir gesehen haben, die reelle Ebene die bisher besprochen Axiome erfüllt. Alle Objekte in diesem Kapitel werden also, auch wenn dies nicht immer explizit gesagt wird, als Teilmengen von $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ aufgefasst.

5.1 Längen im $\mathbb{R}^2$

Zunächst führen wir den Begriff der Länge ein. Dies wird uns bei dem Arbeiten mit geometrischen Objekten sehr nützlich sein.

Definition 5.1. Für zwei Punkte $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei

$$\ell(\overline{AB}) := \|B - A\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

Wir werden fast nie mit der expliziten Definition der Länge einer Strecke arbeiten, sondern nur mit den Eigenschaften, welche in den folgenden beiden Aussagen formuliert werden.

Proposition 5.2. *Für $A, B \in \mathbb{R}^2$ gilt*

$$A \neq B \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad \ell(\overline{AB}) > 0.$$

Beweis. Übung. **q.e.d.**

Satz 5.3 (Dreiecksungleichung)**.** *Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte. Dann gilt*

$$\ell(\overline{AC}) \leqslant \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC}).$$

Es gilt Gleichheit genau dann, wenn die drei Punkt kollinear sind.

Beweis. Die Dreiecksungleichung ist anschaulich klar, und wir wollen diese deswegen nicht beweisen, sonder uns den Sachverhalt anhand einer Skizze klar machen. Man kann diese zum Beispiel mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung aus der Linearen Algebra beweisen. In der Übung werden wir zeigen, daß Gleichheit gilt, falls die drei Punkte kollinear sind. **q.e.d.**

Bemerkung 5.4. Die Dreiecksungleichung erscheint als zwanzigste Proposition in Euklid's Elementen, Proposition 2.20.

Der Begriff des Längenmaßes erlaubt es uns den Begriff der Kongruenz von Strecken viel anschaulicher darzustellen.

Satz 5.5. *Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen in der reellen Ebene sind längenerhaltend.*

Beweis. Wir werden dies nur für Verschiebungen zeigen. Für Spiegelungen und Drehungen braucht man etwas mehr Lineare Algebra.
Wir erinnern uns, daß eine Verschiebung in der reellen Ebene gegeben ist durch

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, X \mapsto X + v$$

für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für alle $P, Q \in \mathbb{R}^2$, daß

$$\begin{aligned} \ell(\overline{\tau_v(P)\tau_v(Q)}) &= \|\tau_v(P) - \tau_v(Q)\| \\ &= \|(P+v) - (Q+v)\| \\ &= \|P - Q\| \\ &\ell(\overline{PQ}). \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, daß Verschiebungen längenerhaltend sind. **q.e.d.**

Man kann zeigen, daß sich alle Bewegungen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen zusammensetzen lassen. Damit erhalten wir folgendes

Korollar 5.6. *Jede Bewegung φ der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist längenerhaltend, das heißt für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gilt*

$$\ell(\overline{\varphi(P)\varphi(Q)}) = \ell(\overline{PQ}).$$

Der Vollständigkeit halber formulieren wir folgenden Satz.

Satz 5.7. *Jede längenerhaltende Abbildung der Ebene ist eine Bewegung.*

Beweis. Dieser Satz ist nicht ganz trivial, er folgt durch eine längere Berechnung mit Methoden der linearen Algebra und geht über den Stoff dieser Vorlesung hinaus. **q.e.d.**

Wir erinnern an folgende Definition die wir bereits im vorherigen Kapitel besprochen hatten.

Definition 5.8. Wir sagen, daß zwei Teilmengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ *kongruent* sind, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt. Wir schreiben dann $\mathcal{F} \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{F}'$.

Bemerkung 5.9. Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir bereits, daß alle Strahlen zueinander kongruent sind, und daß alle Geraden zueinander kongruent sind.

Lemma 5.10. *Es seien $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ zwei Strecken. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind kongruent.

(ii) Es ist $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD})$.

(iii) Es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

Beweis. Die Aussage „(i)⇒(ii)“ folgt aus Korollar 5.6.
Zeigen wir „(ii)⇒(iii)“. Wir nehmen zuerst an, daß $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD}) = 0$. In diesem Fall ist $A = B$ und $C = D$. Nach dem wir mit eine Verschiebung A in C überführen können, können wir dann auch $\overline{AB} = A$ in $\overline{CD} = C$ überführen.
Wir betrachten nun den Fall $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD}) > 0$. Nun ist also $A \neq B$ und $C \neq D$. Wir können eine Bewegung φ finden, die die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ ineinander überführt. Insbesondere ist $\varphi(A) = C$. es gilt nun

$$\ell(\overline{C\varphi(B)}) = \ell(\overline{\varphi(A)\varphi(B)}) = \ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{CD}).$$

Nachdem $\varphi(B)$ und D aud dem gleichen Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegen und den gleichen Abstand zum Anfangspunkt C besitzen, folgt $\varphi(B) = D$.
Die Aussage „(iii)⇒(i)“ ist leicht gezeigt. Wir nehmen an, daß es eine Bewegung φ gibt, mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(C) = D$. Nachdem Bewegungen Strecken in Strecken überführen, folgt dann auch schon, dass φ die Strecke $\overline{AB}$ in die Strecke $\overline{CD}$ überführt. **q.e.d.**

Wir können nun auch den Satz 4.70 zum Abtragen von Strecken folgendermaßen umformulieren:

Lemma 5.11. *Sei $\overrightarrow{AB}$ ein Strahl mit Anfangspunkt A und $P, Q \in \overrightarrow{AB}$. Dann gilt*

$$P = Q \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ})$$

Beweis. Dies werden wir in der Übung behandeln. **q.e.d.**

5.2 Das Winkelmaß im $\mathbb{R}^2$

Wir haben bereits Winkel eingeführt. Es stellt sich heraus, daß die Länge uns dabei hilft Winkel zu messen. Dazu benötigen wir eine neue geometrische Figur: den Kreis.

Definition 5.12. Der *Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $r > 0$* ist definiert als die Menge

$$\mathcal{K}(P, r) := \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{PQ})\}.$$

Bemerkung 5.13. Wir haben bis jetzt nur gelernt, wie man Strecken misst, aber nicht, wie man die Länge von gekrümmten Linien bestimmt. Dies ist bei weitem komplizierter. Für den Kreis gibt es einige Methoden, die Länge (also den Kreisumfang zu bestimmen, auf die wir hier aber nicht genauer eingehen. Uns genügt es, uns zu merken, daß

$$\text{Länge eines Kreises vom Radius } 1 = 2\pi.$$

Dies werden wir im Folgenden verwenden.

Definition 5.14. Sei $\alpha := \sphericalangle_{BAC}$ ein Winkel und $\mathcal{K}(A, 1)$ der Kreis mit Radius 1 um A. Wir definieren die *Größe des Winkels $\sphericalangle_{BAC}$* als

$$\angle_{(BAC)} := \text{die Länge des Kreisabschnitts } \mathcal{K}(A, 1) \cap \mathcal{I}(\alpha).$$

Manchmal bezeichnen wir dies auch als *Winkelmaß.*

Bemerkung 5.15. Da wir das Innere des Winkels für die Definition des Winkelmaßes benutzt haben, sehen wir, daß das maximale Winkelmaß durch die Länge eines Halbkreises gegeben ist, also durch π.
Streng genommen schließt unsere Definition von Winkeln den Winkel, der nur aus einem Strahl besteht (auch *Nullwinkel* genannt), und den Winkel, bei dem die beiden Schenkel auf einer gemeinsamen Gerade liegen (auch *gestreckter Winkel* genannt) aus. Der Einfachheit halber (und wenn keine Verwirrungsmöglichkeit besteht), werden wir diese Begriffe jedoch benutzen.
Wir führen noch folgende Begriffe ein:

(i) Wir sagen der Winkel ist ein *Nullwinkel*, wenn das Winkelmaß 0 beträgt.

(ii) Wir sagen der Winkel ist ein *spitzer Winkel*, wenn das Winkelmaß in $(0, \frac{\pi}{2})$ liegt.

(iii) Wir sagen der Winkel ist ein *rechter Winkel*, wenn das Winkelmaß $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

(iv) Wir sagen der Winkel ist ein *stumpfer Winkel*, wenn das Winkelmaß in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ liegt.

(v) Wir sagen der Winkel ist ein *Vollwinkel*, wenn das Winkelmaß π beträgt. Anstatt „Vollwinkel" sagt man manchmal auch *gestreckter Winkel*.

Notation 5.16. Wie üblich deuten wir in Zeichnungen einen rechten Winkel mithilfe von einem Punkt und einem Viertelkreis an.

Satz 5.17. *Seien A, B, C paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^2$.*

(i) Wenn die Strahlen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ nicht identisch sind, dann gilt $\angle_{(ABC)} > 0$.

(ii) Wenn P ein Punkt im Inneren von $\sphericalangle_{ABC}$ liegt, dann gilt

$$\angle_{(ABC)} = \angle_{(ABP)} + \angle_{(PBC)}.$$

(iii) Es ist $\angle_{(ABC)} = \angle_{(CBA)}$.

Beweis. **(i)** Die Aussage folgt daraus, dass in diesem Fall der Kreisabschnitt echt positive Länge hat.

(ii) Der Kreisabschnitt für den Winkel, welcher durch A, B und C festgelegt wird, wird durch den Strahl $\overrightarrow{BP}$ in zwei Teile zerlegt. Nachdem die Winkel durch die Länge der Kreisabschnite definiert sind, erhalten wir sofort die gewünschte Aussage.

(iii) Diese Aussage ist klar, da die Länge des Kreisabschnitts nicht von der Reihenfolge der Schenkel abhängt. **q.e.d.**

Lemma 5.18. *Sei $\overrightarrow{AB}$ ein Strahl und P und Q zwei Punkte, die auf der gleichen Seite von $g(A, B)$ liegen (in der gleichen Halbebene). Wenn $\angle_{(BAP)} = \angle_{(BAQ)}$, so gilt $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$.*

Beweis. Das folgt aus den Anordnungsaxiomen. Anschaulich kann man es sich jedoch sehr schön mit einem Bild klar machen. **q.e.d.**

Proposition 5.19. *Bewegungen sind winkelerhaltend, das heißt, für einen Winkel $\sphericalangle_{BAC}$ mit Winkelmaß $\angle_{(BAC)}$ gilt für jede Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*

$$\angle_{(\varphi(BAC))} = \angle_{(\varphi(B)\varphi(A)\varphi(C))} = \angle_{(BAC)}$$

Beweis. Wir wissen, daß Bewegungen Längen erhalten. Da das Winkelmaß über Längen definiert ist, schließen wir daraus, daß Bewegungen auch Winkel erhalten. **q.e.d.**

5.3 Winkel zwischen Geraden

Eine erste Anwendung sind die Schnittwinkel von Geraden.

Definition 5.20. Seien g und h Geraden, die sich in einem Punkt P schneiden. Der Punkt P zerlegt die Geraden in jeweils zwei Strahlen. Wir nennen Winkel, welche gegenüber liegen *Scheitelwinkel* und wir nennen Winkel, welche nebeneinander liegen *Nebenwinkel*.

Satz 5.21. *Seien g und h Geraden mit Schnittpunkt P.*

(i) Die Winkelmaße von zwei Nebenwinkeln ergeben zusammen π.

(ii) Scheitelwinkel sind gleich groß.

Beweis. Zwei Nebenwinkel ergeben zusammen einen Vollwinkel. Die Aussage **(i)** folgt also aus Satz 5.17 (ii).

Die Aussage **(ii)** werden wir in der Übung zeigen. **q.e.d.**

Wir betrachten nun eine etwas kompliziertere Situation.

Definition 5.22. Seien $g_1 \neq g_2$ (möglicherweise parallele) Geraden und h eine weitere Gerade, die beide schneidet.

(i) Liegen zwei Winkel auf der gleichen Seite von h und auf der gleichen Seite einer der Geraden g_1, g_2 und nicht auf der gleichen Seite der anderen Geraden, so spricht man von *Stufenwinkeln (F-Winkeln)*.

(ii) Liegen zwei Winkel auf der gleichen Seite von h und auch jeweils auf der gleichen Seite von g_1 und g_2, so nennt man sie *Ergänzungswinkel (E-Winkel)*.

(iii) Liegen zwei Winkel auf verschiedenen Seiten von h und jeweils auf der gleichen Seite von g_1 und g_2, so heißen sie *Wechselwinkel (Z-Winkel)*.

Satz 5.23. *Seien $g_1 \neq g_2$ parallele Geraden und h eine weitere Gerade, welche g_1 und g_2 schneidet.*

(i) Die Stufenwinkel, sind gleich groß.

(ii) Die Wechselwinkel sind ebenfalls gleich groß.

(iii) Die Winkelmaße von zwei Ergänzungswinkel ergeben zusammen π.

Beweis. Sei P_1 der Schnittpunkt von g_1 und h und P_2 der Schnittpunkt von g_2 und h. Wir bezeichnen mit $v = P_2 - P_1$ den Richtungsvektor von P_1 nach P_2. Sei $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige Verschiebung die P_1 auf P_2 abbildet.

Wir zeigen zuerst, daß $\tau_v(g_1) = g_2$:
Wir wissen, daß $\tau_v(g_1)$ parallel zu g_1 verläuft. Da $\tau_v(P_1) = P_2$ ist, verläuft $\tau_v(g_1)$ durch P_2. Auch g_2 ist eine zu g_1 parallele Gerade, die durch P_2 verläuft. Es folgt $\tau_v(g_1) = g_2$.

Wir zeigen nun, daß $\tau_v(h) = h$:
Wir wissen, daß $\tau_v(h)$ parallel zu h verläuft. Da $P_1, P_2 \in h$ und $\tau_v(P_1) = P_2$, sehen wir, daß h und $\tau_v(h)$ beide den Punkt $\tau_v(P_1) = P_2$ enthalten. Zwei parallel Geraden, die durch den gleichen Punkt verlaufen, sind identisch, also $\tau_v(h) = h$.

Es folgt nun also, daß τ_v den Stufenwinkel bei P_1 in den bei P_2 überführen. Da Bewegungen Winkel erhalten, sind diese gleich groß.

Weiter folgt, daß τ_v den Wechselwinkel bei P_1 in den Scheitelwinkel des Wechselwinkels bei P_2 überführt. Aus Satz 5.21 (ii) folgt, daß diese gleich groß sind.

Die Aussage über Ergänzungswinkel werden wir in der Übung zeigen. **q.e.d.**

5.4 Kreise im $\mathbb{R}^2$

Kreise sind wichtige geometrische Objekte, die bereits die Philosophen und Geometer in der Antike faszinierten. Wir haben bereits gesehen, daß der Einheitskreis bei der Definition des Winkelmaßes eine zentrale Rolle spielt. In den nächsten Wochen werden wir noch weitere Anwendungen kennenlernen. Um uns darauf vorzubereiten, werden wir einige Grundlagen besprechen.

Wir erinnern zuerst an die Definition eines Kreises und wir führen zudem auch die zugehörige Kreisscheibe ein.

Definition 5.24. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

(i) Der *Kreis mit Mittelpunkt P und Radius r* ist definiert als die Menge

$$\mathcal{K}(P,r) := \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{PQ}) = r\}.$$

(ii) Die *Kreisscheibe mit Mittelpunkt P und Radius r* ist definiert als die Menge

$$\mathcal{S}(P,r) := \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{PQ}) \leqslant r\}.$$

Für Rechnungen ist folgende Aussage nützlich:

Lemma 5.25. *Seien $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ Punkte und $r > 0$. Dann gilt:*

(i) $Q \in \mathcal{K}(P,r) \iff (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = r^2$.

(ii) $Q \in \mathcal{S}(P,r) \iff (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 \leqslant r^2$.

Beweis. Übung. **q.e.d.**

Die erste Aussage, die wir betrachten, betrifft den Durchmesser eines Kreises.

Definition 5.26. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine (abgeschlossene) Teilmenge. Wir bezeichnen den maximalen Abstand zwischen zwei Punkten in X als Durchmesser von X und notieren ihn mit $\operatorname{diam}(X)$. Mit anderen Worten, es ist

$$\operatorname{diam}(X) := \max\{\ell(\overline{PQ}) \mid P, Q \in X\}.$$

Bemerkung 5.27. Die obige Definition funktioniert nur für abgeschlossene Teilmengen, d.h. grob gesagt, Teilmengen mit Rand. Dies genügt für unsere Zwecke. Man kann die Definition auf alle Teilmengen erweitern, wenn man das Maximum durch das Supremum ersetzt, also

$$\operatorname{diam}(X) := \sup\{\ell(\overline{PQ}) \mid P, Q \in X\}.$$

Beispiel 5.28. Der Durchmesser eines Quadrats $Q(a)$ mit Seitenlänge $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Länge der Diagonalen, also

$$\operatorname{diam}(Q(a)) = \sqrt{2}a.$$

Der Durchmesser eines gleichseitigen Dreiecks $D(a)$ mit Seitenlänge $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Seitenlänge, also

$$\operatorname{diam}(D(a)) = a.$$

Lemma 5.29. *Der Durchmesser eines Kreises mit Radius r ist $2r$.*

Beweis. Übung. **q.e.d.**

Lemma 5.30. *Jede Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ führt einen Kreis vom Radius r in einen Kreise vom Radius r über. Genauer gilt für einen Kreise $\mathcal{K}(P, r)$*

$$\varphi(\mathcal{K}(P, r)) = \mathcal{K}(\varphi(P), r).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß Bewegungen längenerhaltend sind, da die Definition des Kreises mit Hilfe von Längen erfolgt. **q.e.d.**

Bemerkung 5.31. Die obige Aussage ist sehr nützlich für Rechnungen, da wir damit beliebige Kreise in Kreise überführen können, in denen Rechnungen leichter sind. Dies sind zum Beispiel Kreise die den Nullpunkt als Mittelpunkt haben.

Wir werden zuerst zeigen, daß sich zwei Kreise in maximal zwei Punkten schneiden.

Satz 5.32. *Seien $\mathcal{K}(P, r)$ und $\mathcal{K}(Q, s)$ zwei Kreise mit $P \neq Q$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Die Kreise $\mathcal{K}(P, r)$ und $\mathcal{K}(Q, s)$ schneiden sich nicht.

(ii) Die Kreise $\mathcal{K}(P, r)$ und $\mathcal{K}(Q, s)$ schneiden sich in genau einem Punkt, und dieser liegt auf der Geraden $g = g(P, Q)$.

(iii) Die Kreise $\mathcal{K}(P, r)$ und $\mathcal{K}(Q, s)$ schneiden sich in zwei Punkten $U \neq V$, und diese haben die Eigenschaft, daß $\sigma_{g(P,Q)}(U) = V$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung des Satzes durch eine explizite Rechnung. Aus Lemma 5.30 folgt, daß sich an der Aussage nichts ändert, wenn wir zuerst eine Bewegung auf die Kreise anwenden. Nach der Definition von Bewegungen gibt es eine Bewegung φ, die den Strahl $\overrightarrow{PQ}$ in die nicht-negative x-Achse überführt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\varphi(Q) &= \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} \\
\varphi(\mathcal{K}(P, r)) &= \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r\right) \\
\varphi(\mathcal{K}(Q, s)) &= \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, s\right).
\end{aligned}$$

für $q > 0$. Wir können nun also die Behauptung für $\mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r\right)$ und $\mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, s\right)$ zeigen. Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r\right) \cap \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, s\right) &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r\right) \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, s\right) \\
&\iff (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \text{ und } (x-q)^2 + (y-0)^2 = s^2 \\
&\iff x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } (x-q)^2 + y^2 = s^2 \\
&\iff x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } (x-q)^2 + (r^2 - x^2) = s^2 \\
&\iff x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } q^2 - 2qx + r^2 = s^2 \\
&\iff y^2 = r^2 - x^2 \text{ und } x = \frac{-s^2 + r^2 + q^2}{2q}
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r\right) \cap \mathcal{K}\left(\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}, s\right) \iff \begin{cases} x = \frac{-s^2+r^2+q^2}{2q} \\ y^2 = r^2 - \left(\frac{-s^2+r^2+q^2}{2q}\right)^2 =: d \end{cases}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle.

$d < 0$: Die Kreise schneiden sich nicht, denn es gibt keine reelle Zahl y mit $y^2 = d < 0$.

$d = 0$: Die Kreise schneiden sich in genau einem Punkt der Form $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Insbesondere liegt der Schnittpunkt auf der x-Achse, und dies ist die Gerade durch die Mittelpunkte der Kreise.

$d > 0$: Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten der Form $(x, \pm\sqrt{d})$. Insbesondere sind die Schnittpunkte Spiegelbilder bezüglich der x-Achse.

Nach Anwendung der Bewegung φ^{-1} erhalten wir die Aussage für die ursprünglichen Kreise. **q.e.d.**

Als nächstes betrachten wir wie sich ein Kreis und eine Gerade in der Ebene zueinander verhalten.

Satz 5.33. *Sei $\mathcal{K}(P, r)$ ein Kreis mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) Der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ und die Gerade g schneiden sich nicht.

(ii) Der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ und die Gerade g schneiden sich in genau einem Punkt Q.

(iii) Der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ und die Gerade g schneiden sich in zwei Punkten $U \neq V$.

Beweis. Übung. **q.e.d.**

Definition 5.34. Sei $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade.

(i) Schneidet g den Kreis $\mathcal{K}$ nicht, so nennt man g eine Passante zu $\mathcal{K}$.

(ii) Schneidet g den Kreis $\mathcal{K}$ in genau einem Punkt, so nennt man g eine Tangente zu $\mathcal{K}$.

(iii) Schneidet g den Kreis $\mathcal{K}$ in zwei verschiedenen Punkten, so nennt man g eine Sekante zu $\mathcal{K}$.

Satz 5.35. *Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(P, r)$ ein Kreis und $Q \in \mathcal{K}$. Dann gilt:*

(i) Es gibt genau eine Tangente zu $\mathcal{K}$ durch Q.

(ii) Die Tangente zu $\mathcal{K}$ durch Q ist die Gerade durch Q, welche senkrecht auf der Geraden $g(P, Q)$ steht.

Beweis. Da wir diesen Satz wiederum durch eine explizite Rechnung beweisen werden, machen wir uns die Situation so einfach wie möglich, indem wir eine geeignete Bewegung anwenden. Mithilfe der Verschiebung $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den Richtungsvektor $v = 0 - P$ können wir P in den Ursprung verschieben, und mithilge einer Drehung um den

Ursprung können wir den Punkt Q auf den Punkt $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der x-Achse bewegen. Es genügt also folgende Behauptung zu beweisen:
Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(0, r)$ ein Kreis mit Radius r um den Ursprung. Durch den Punkt $Q = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt es genau eine Tangente zu $\mathcal{K}$, nämlich die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es ist klar, daß die Gerade g den Kreis nur in Q schneidet. Also ist g eine Tangente zu $\mathcal{K}$ durch Q. Weiterhin ist klar, daß diese Gerade g die Gerade durch den Ursprung und den Punkt Q, d.h. die x-Achse, senkrecht schneidet.
Wir müssen nun also noch zeigen, dass g die einzige Tangente zum Kreis $\mathcal{K}$ am Punkt Q ist. Sei also h eine Gerade durch Q, welche nicht vertikal ist. Wir müssen zeigen, daß h den Kreis $\mathcal{K}$ in einem zweiten Punkt schneidet. Wir können h schreiben als

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei der Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ nicht vertikal ist, also $a \neq 0$.
Wir bestimmen nun die Schnittpunkte von h mit $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{K} &\iff (r + \lambda a)^2 + (0 + \lambda b)^2 = r^2 \\
&\iff r^2 + 2r\lambda a + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 = r^2 \\
&\iff 2r\lambda a + \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 = 0 \\
&\iff \lambda(2ra + \lambda a^2 + \lambda b^2) = 0 \\
&\iff \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = \frac{-2ra}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

wo wir am Ende benutzt haben, daß $a^2 + b^2 \neq 0$, da $a \neq 0$. Da $a, r \neq 0$ sind, ist $\frac{-2ra}{a^2+b^2} \neq 0$. Es gibt also zwei Punkte, die auf h und auf $\mathcal{K}$ liegen, nämlich

$$Q = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-2ra}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und dies zeigt die Behauptung. **q.e.d.**

5.5 Kongruenzsätze für Dreiecke

In diesem Teil wollen wir uns einige aus der Schule bekannte Aussagen über die Kongruenz von Dreiecken anschauen.
Zur Erinnerung folgende Definitionen:

Definition 5.36. Wir sagen, daß zwei Teilmengen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ *kongruent* sind, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt. Wir schreiben dann $\mathcal{F} \,\widehat{=}\, \mathcal{F}'$.

Definition 5.37. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ drei *nicht kollineare* Punkte. Dann ist

$$\triangle_{ABC} := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

das *von A, B und C aufgespannte Dreieck*. Es hat die *Seiten* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$. Seine *Innenwinkel* sind

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sphericalangle_{BAC} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} && \text{am Eckpunkt A,} \\ \beta &:= \sphericalangle_{CBA} = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} && \text{am Eckpunkt B,} \\ \gamma &:= \sphericalangle_{ACB} = \overrightarrow{CB} \cup \overrightarrow{CA} && \text{am Eckpunkt C.} \end{aligned}$$

Lemma 5.38. *Zwei Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ in $\mathbb{R}^2$ sind kongruent genau dann, wenn es eine Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$.*

Beweis. Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn alle Seiten und alle Winkel kongruent sind. Somit folgt die Aussage aus Proposition 4.65 und Satz 4.75. **q.e.d.**

Bemerkung 5.39. Zu gegebenen Punkten A, B, C hängt das Dreieck $\triangle_{ABC}$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ a priori nicht von der Reihenfolge der Punkte ab. Tatsächlich gilt zum Beispiel

$$\triangle_{ABC} = \triangle_{BAC} \subset \mathbb{R}^2.$$

Allerdings werden wir die Aussage „$\triangle_{ABC}$ *ist kongruent zu* $\triangle_{A'B'C'}$" stets so verwenden, daß es eine Bewegung φ gibt, die A auf A', B auf B' und C auf C' abbildet. Das heißt, φ berücksichtigt die Reihenfolge der Eckpunkte.

Die Kongruenzsätze für Dreiecke geben uns Kriterien an die Hand, um zu zeigen, daß zwei Dreiecke kongruent sind.

Satz 5.40 (Kongruenzsatz SWS)**.** *Seien A, B, C und A', B', C' jeweils drei nicht-kollineare Punkte in $\mathbb{R}^2$. Wenn gilt*

$$\begin{aligned} \ell(\overline{AB}) &= \ell(\overline{A'B'}), \\ \ell(\overline{BC}) &= \ell(\overline{B'C'}), \\ \beta := \angle_{ABC} &= \angle_{A'B'C'} =: \beta', \end{aligned}$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

Beweis. Aus der Voraussetzung $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$ folgt nach Lemma 5.10, daß es eine Bewegung φ gibt, mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$.
Sind nun $\varphi(C)$ und C' auf verschiedenen Seiten von der Geraden $g(A', B')$, so wenden wir zusätzlich die Spiegelung $\sigma_{g(A',B')}$ an der Geraden $g(A', B')$ an. Sei $\psi := \sigma_{g(A',B')} \circ \varphi$. Dann liegen $\psi(C)$ und C' auf der gleichen Seite von $g(A', B')$. Sind $\varphi(C)$ und C' bereits auf der gleichen Seite von $g(A', B')$, so setzen wir $\psi := \varphi$. Natürlich gilt in beiden Fällen $\psi(A) = A'$ und $\psi(B) = B'$.
Aus der Voraussetzung $\beta := \angle_{ABC} = \angle_{A'B'C'} =: \beta'$ (und da $\angle_{ABC} = \angle_{\psi(A)\psi(B)\psi(C)}$) folgt nach Lemma 5.18, daß $\overrightarrow{\psi(B)\psi(C)} = \overrightarrow{B'C'}$.
Aus der Voraussetzung $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{B'C'})$ (und da $\ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{\psi(B)\psi(C)})$) folgt nach Lemma 5.11, daß sogar schon $\psi(C) = C'$. Wir haben also eine Bewegung ψ gefunden mit $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$ und $\psi(C) = C'$. Das zeigt, daß die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind. **q.e.d.**

Satz 5.41 (Kongruenzsatz WSW)**.** *Seien A, B, C und A', B', C' jeweils drei nicht-kollineare Punkte in $\mathbb{R}^2$. Wenn gilt*

$$\begin{aligned} \ell(\overline{AB}) &= \ell(\overline{A'B'}), \\ \alpha := \angle_{CAB} &= \angle_{C'A'B'} =: \alpha' \\ \beta := \angle_{ABC} &= \angle_{A'B'C'} =: \beta', \end{aligned}$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

Beweis. Da $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$, finden wir wir oben eine Bewegung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$, und so daß $\psi(C)$ und C' auf der gleichen Seite von $g(A', B')$ liegen.
Da $\alpha := \angle_{CAB} = \angle_{C'A'B'} =: \alpha'$, folgt wie oben $\overrightarrow{\psi(A)\psi(C)} = \overrightarrow{A'C'}$. Da $\beta := \angle_{ABC} = \angle_{A'B'C'} =: \beta'$, folgt wie oben $\overrightarrow{\psi(B)\psi(C)} = \overrightarrow{B'C'}$.
Da die beiden Geraden $g(\psi(A), \psi(C)) = g(A', C')$ und $g(\psi(B), \psi(C)) = g(B', C')$ nach Satz thm: parallele Geraden im R2 (also dem Parallelenaxiom) höchstens einen Punkt gemeinsam haben, muß schon gelten, daß $\psi(C) = C'$ ist.
Wieder haben wir eine Bewegung ψ gefunden mit $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$ und $\psi(C) = C'$.
Das zeigt, daß die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind. **q.e.d.**

Satz 5.42 (Kongruenzsatz SSS). *Seien A, B, C und A', B', C' jeweils drei nicht-kollineare Punkte in $\mathbb{R}^2$. Wenn gilt*

$$\begin{aligned} \ell(\overline{AB}) &= \ell(\overline{A'B'}), \\ \ell(\overline{BC}) &= \ell(\overline{B'C'}), \\ \ell(\overline{CA}) &= \ell(\overline{C'A'}), \end{aligned}$$

dann sind die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent.

Beweis. Da $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{A'B'})$, finden wir wir oben eine Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$.
Wir machen nun folgende Beobachtungen:

(i) Aus $\ell(\overline{C'A'}) = \ell(\overline{CA}) = \ell(\overline{\varphi(C)\varphi(A)})$ folgt, daß sowohl $\varphi(C)$ als auch C' auf dem Kreis $\mathcal{K}(A', r)$ um $\varphi(A) = A'$ mit Radius $r := \ell(\overline{C'A'}) = \ell(\overline{CA})$ liegen.

(ii) Aus $\ell(\overline{B'C'}) = \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{\varphi(B)\varphi(C)})$ folgt, daß sowohl $\varphi(C)$ als auch C' auf dem Kreis $\mathcal{K}(B', s)$ um $\varphi(B) = B'$ mit Radius $s := \ell(\overline{B'C'}) = \ell(\overline{BC})$ liegen.

Also sind $\varphi(C)$ und C' Schnittpunkte der zwei Kreise $\mathcal{K}(A', r)$ und $\mathcal{K}(B', s)$. Es folgt aus Satz 5.32, daß entweder $\varphi(C) = C'$ oder daß wir $\varphi(C)$ entlang der Geraden $g(A', B')$ auf C' spiegeln können. Im ersteren Fall sei $\psi := \varphi$ im letzteren Fall sei $\psi := \sigma_{g(A',B')} \circ \varphi$.
In beiden Fällen gilt $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$ und $\psi(C) = C'$, und wir haben gezeigt, daß die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{A'B'C'}$ kongruent sind. **q.e.d.**

Als Anwendung betrachten wir gewisse regelmäßige Dreiecke.

Definition 5.43. Ein Dreieck heißt *gleichschenklig*, wenn es zwei Seiten gibt, welche die gleiche Länge besitzen.
Ein Dreieck heißt *gleichwinklig*, wenn es zwei Innenwinkel gibt, welche gleich groß sind.
Ein Dreieck heißt *gleichseitig*, wenn all drei Seiten die gleiche Länge besitzen.

Satz 5.44. *Ein Dreieck ist gleichschenklig, genau dann, wenn es gleichwinklig ist. Sei genauer $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Dann gilt*

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \angle_{BAC} = \angle_{ABC}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$. Wir wollen zeigen, daß $\angle_{BAC} = \angle_{ABC}$.
Sei P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{APC}$ und $\triangle_{BPC}$.
Es gilt

(i) $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$, da P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist,

(ii) $\ell(\overline{PC}) = \ell(\overline{PC})$, trivialerweise,

(iii) $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$, nach Voraussetzung.

Somit sind die Voraussetzungn des Kongruenzsatzes 5.42 erfüllt. Es folgt also, daß die Dreiecke $\triangle_{APC}$ und $\triangle_{BPC}$ kongruent sind. Insbesondere stimmen ihre Innenwinkel überein, und es gilt

$$\angle_{PAC} = \angle_{PBC}.$$

Aber es ist $\sphericalangle_{PAC} = \sphericalangle_{BAC}$ und $\sphericalangle_{PBC} = \sphericalangle_{ABC}$. Also auch $\angle_{BAC} = \angle_{ABC}$.
Die umgekehrte Aussage werden wir in der Übung behandeln. **q.e.d.**

Wir besprechen noch eine einfache Folgerung daraus.

Korollar 5.45. *Alle Innenwinkel in einem gleichseitigen Dreieck sind gleich groß.*

Beweis. Sei $\triangle_{ABC}$ ein gleichseitiges Dreieck. Wie üblich bezeichnen wir den Innenwinkel bei A mit α, bei B mit β, bei C mit γ. Da $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$ folgt $\alpha = \beta$. Da $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{AC})$ folgt $\beta = \gamma$. **q.e.d.**

5.6 Die Mittelsenkrechte

Wir erinnern zunächst an folgenden Satz:

Satz 5.46. *Sei g eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und P ein beliebiger weiterer Punkt. Dann gibt es genau eine Gerade h, welche senkrecht auf g steht und welche durch P verläuft.*

Beweis. Sei $g = \{Q + \lambda \cdot v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$, mit einem geeigneten Aufpunkt Q und einem Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Mit etwas linearer Algebra kann man nun zeigen, daß die durch

$$g = \{P + \lambda \cdot w \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}, w = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

definierte Gerade, die offensichtlich durch P verläuft, senkrecht zu g ist.
Daß diese Gerade eindeutig ist, folgt mit Lemma 5.18. **q.e.d.**

Definition 5.47. Wir bezeichnen diese Gerade h oben als das *Lot bezüglich P auf g* und wir bezeichnen den Schnittpunkt von h mit g als den Lotfußpunkt.
Ist $P \in g$, so sagen wir auch, daß h das von P auf g *errichtete Lot* ist. Ist $P \notin g$, so sagen wir auch, daß h das von P auf g *gefällte Lot* ist.

Als Folgerung erhalten wir eine Aussage, die uns insbesondere Definition der Mittelsenkrechten gibt.

Korollar 5.48. *Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$, welche senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Wir nennen diese Gerade die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$.*

Wir werden nun die Mittelsenkrechte durch eine weitere Eigenschaft charakterisieren, die es uns erlaubt, diese mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Proposition 5.49. *Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$. Die Mittelsenkrechte m_{AB} zu $\overline{AB}$ ist die Menge aller Punkte, die zu A und B den gleichen Abstand besitzen, also*

$$m_{AB} = \{Q \in \mathbb{R}^2 \,|\, \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\}.$$

Beweis. Um zu zeigen, daß die obige Gleichheit der beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ gilt, zeigen wir zuerst, daß jeder Punkt der Geraden m_{AB} auch in der Menge $\{Q \in \mathbb{R}^2 \,|\, \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\}$ liegt.
Sei P der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Insbesondere gilt $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$, P ist also in der rechten Menge enthalten. Nach Definition der Mittelsenkrechten ist klar, daß $P \in m_{AB}$.
Sei also $P \neq Q \in m_{AB}$. Wir müssen zeigen, daß $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{QPB}$ und $\triangle_{QPA}$.
Da $g(P,Q) = m_{AB}$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht folgt

$$\angle_{QPB} = \angle QBA = \frac{\pi}{2}.$$

Da P der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist gilt

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP}).$$

Die Strecke $\overline{PQ}$ liegt auf beiden Dreiecken.
Nach dem SWS-Satz 5.40 folgt also, daß $\triangle_{QPB}$ und $\triangle_{QPA}$ kongruent sind. Insbesondere gilt $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$.
In der Übung werden wir die Umkehrung zeigen: gilt für einen Punkt Q, daß $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$, so folgt $Q \in m_{AB}$. **q.e.d.**

Bemerkung 5.50. Allgemein gilt: um zu zeigen, daß zwei Mengen X, Y übereinstimmen, genügt es zu zeigen, daß jedes Element $Q \in X$ auch in Y ist, und daß jedes Element $Q \in Y$ auch in X ist.

Konstruktion 5.51 (Mittelsenkrechte)**.** *Es seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte.*

(i) Wir wählen einen hinreichend großen Radius r, so dass sich die Kreise $\mathcal{K}(A,r)$ und $\mathcal{K}(B,r)$ in zwei verschiedenen Punkten $S \neq T$ schneiden.

(ii) Der Schnittpunkt P der Gerade $g(S,T)$ mit der Gerade $g(A,B)$ ist dann der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und die Gerade $g(S,T)$ ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Beweis. Die Punkte S und T sind verschieden und haben jeweils den gleichen Abstand r zu A und B. Somit liegen beide Punkte nach Proposition 5.49 auf der Mittelsenkrechten. Da zwei verschiedene Punkte eine Gerade bereits eindeutig festlegen, folgt, dass $g(S,T) = m_{AB}$. **q.e.d.**

Als Anwendung betrachten wir die Mittelsenkrechten eines Dreiecks.

Satz 5.52. *Die drei Mittelsenkrechten eines beliebigen Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt.*

Beweis. Sei $\triangle_{ABC}$ ein beliebiges Dreieck. Wir bezeichnen mit m_{BC} die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BC}$ und mit m_{AC} die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$. Diese Geraden sind nicht parallel, sie schneiden sich also in genau einem Punkt P.

Wir müßen nun noch zeigen, daß die Mittelsenkrechte m_{AB} zu $\overline{AB}$ ebenfalls durch P verläuft. Nach Proposition 5.49 genügt es zu zeigen, daß $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP})$.
Da $P \in m_{BC}$ ist, gilt nach dieser Proposition 5.49, daß

$$\ell(\overline{BP}) = \ell(\overline{CP}).$$

Da $P \in m_{AC}$ ist, gilt nach dieser Proposition 5.49, daß

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{CP}).$$

Zusammen folgt also

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{CP}) = \ell(\overline{BP}),$$

wie gewünscht. **q.e.d.**

Satz 5.53 (Umkreis eines Dreiecks)**.** *Es seien A, B und C drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Kreis, welcher durch A, B und C verläuft. Dieser Kreise wird auch Umkreis des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ genannt.*

Beweis. Wir bezeichnen die Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ jeweils mit m_{BC}, m_{AC} und m_{AB}. Wenden dir Satz 5.52 auf das Dreieck $\triangle_{ABC}$ an, so schließen wir, daß die drei Mittelsenkrechten m_{BC}, m_{AC} und m_{AB} sich in einem Punkte P schneiden. Wie im Beweis oben leiten wir aus Proposition 5.49 ab, daß

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{CP}) = \ell(\overline{BP})) =: r.$$

In anderen Worten, die Punkte A, B, C haben den gleichen Abstand zu P, liegen also auf dem Kreis mit Radius r um P.
Die Eindeutigkeit des Umkreises folgt daraus, daß zwei verschiedene Kreise nach Satz 5.32 maximal zwei Schnittpunkte haben. **q.e.d.**

Zum Abschluß des Abschnitts werden wir noch die Konstruktion des Lots betrachten. Genauer gesagt werden wir das Fällen und das Errichten eines Lots besprechen.

Konstruktion 5.54 (Errichten eines Lots)**.** *Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $P \in g$ ein Punkt, welcher auf der Geraden liegt.*

(i) Wähle $s > 0$ und bezeichne mit A und B die Schnittpunkte des Kreises $\mathcal{K}(P, s)$ mit der Geraden g.

(ii) Wähle $r > s$ und bezeichne mit S und T die Schnittpunkte der Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$.

(iii) Dann ist die Gerade $g(S, T)$ das Lot von $g = g(A, B)$ im Punkt P.

Beweis. Zunächst beobachten wir, daß die Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$ wirklich zwei verschiedene Schnittpunkte S und T haben, da $r > s$ ist, und $\ell(\overline{AB}) = 2s$. Die Gerade $g(S, T)$ ist also wohldefiniert.
Wir müssen nun noch zeigen:

(i) die Gerade $g(S, T)$ verläuft durch P,

(ii) die Gerade $g(S, T)$ steht senkrecht auf der Geraden g.

In Konstruktion 5.51 haben wir gesehen, daß die Gerade $g(S, T)$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist. Insbesondere verläuft sie durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, nämlich P, und steht senkrecht auf $g = g(A, B)$. **q.e.d.**

Das Fällen eines Lotes werden wir in der Übung besprechen.

Konstruktion 5.55 (Fällen eines Lots)**.** *Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade un $P \notin g$ ein Punkt.*

(i) Wähle $r > 0$ so groß, daß der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ die Gerade g in zwei Punkten A und B schneidet.

(ii) Sei Q der zweite Schnittpunkt der Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$.

(iii) Dann ist die Gerade $g(P, Q)$ das von P auf g gefällte Lot.

Beweis. Das werden wir in der Übung besprechen. **q.e.d.**

5.7 Parallelen und Anwendungen

Wie wir bereits besprochen haben, ist das Parallelenaxiom eines der wichtigsten aber auch eines der kompliziertesten und wahrscheinlich das umstrittenste von Euklids Axiomen. Im $\mathbb{R}^2$ kann man es jedoch relativ einfach zeigen.

Satz 5.56. *Zu jeder Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ und jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Gerade durch P, welche parallel zu g verläuft.*

Beweis. Sei $g = \{Q + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit einem geeigneten Aufpunkt Q und einem Richtungsvektor v. Wir setzen nun $h = \{P + \lambda \cdot v \mid \lambda\mathbb{R}\}$. Wir müssen nun zeigen, daß h parallel zu g verläuft, und daß h die einzige Gerade durch P ist, welche parallel zu g verläuft.
Wir zeigen zuerst, daß h parallel zu g verläuft. Angenommen, $g \cap h = \varnothing$, sie haben also keinen gemeinsamen Punkt. Dann sind g und h nach Definition 4.15 bereits parallel.
Sei also $g \cap h \neq \varnothing$. Dann wählen wir einen Punkt $S \in g \cap h$. Da jeder Punkt einer Gerade als Aufpunkt geeignet ist, folgt

$$\begin{aligned} g &= \{Q + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{S + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ h &= \{P + \lambda \cdot v \mid \lambda\mathbb{R}\} = \{S + \lambda \cdot v \mid \lambda\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Also ist $g = h$, und identische Geraden sind trivialerweise parallel. **q.e.d.**

Wir haben schon in einigen Anwendungen parallele Geraden verwendet. Wir werden hier noch eine Umkehrung von Satz 5.23 erwähnen, die ganz ähnlich gezeigt wird:

Satz 5.57. *Seien $g_1 \neq g_2 \subset \mathbb{R}^2$ Geraden und $h \subset \mathbb{R}^2$ eine weitere Gerade, die g_1 und g_2 schneidet. Dann gilt:*

(i) Wenn die Stufenwinkel gleich groß sind, dann sind g_1 und g_2 parallel.

(ii) Wenn die Wechselwinkel gleich groß sind, dann sind g_1 und g_2 parallel.

(iii) Wenn die Ergänzungswinkel sich zu π ergänzen, dann sind g_1 und g_2 parallel.

Wir können nun versuchen, Parallelen mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Konstruktion 5.58. *Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $P \in \mathbb{R}^2 \backslash g$ ein Punkt, welcher nicht auf g liegt.*

(i) Mithilfe von Konstruktion 5.55 fällen wir das Lot l von P auf g. Wir bezeichnen dieses mit l.

(ii) *Mit Hilfe von Konstruktion 5.54 errichten wir nun das Lot h durch P zu l. Die Gerade h ist die Parallele zu g durch P.*

Beweis. Die Gerade h steht senkrecht auf l, welche wiederum senkrecht auf g steht. Es folgt nun aus Satz 5.57, daß h und g parallel sind. **q.e.d.**

Wir kommen nun zu einigen Anwendungen, in denen Parallelen eine Rolle spielen.

Definition 5.59. In einem Dreieck bezeichnen wir für einen Eckpunkt P die Strecke von P zum Lotfußpunkt auf die Gerade durch die anderen beiden Eckpunkte als *Höhe des Dreiecks bezüglich P*.

Bemerkung 5.60. Die Höhe muß nicht notwendigerweise in dem Dreieck selbst verlaufen.

Satz 5.61. *In jedem Dreieck $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{R}^2$ schneiden sich die drei Höhen in genau einem Punkt.*

Beweis. Wir führen drei weitere Geraden ein:

(i) Sei p_{BC}^A die Gerade durch A, welche parallel zu $g(B,C)$ verläuft.

(ii) Sei p_{AC}^B die Gerade durch B, welche parallel zu $g(A,C)$ verläuft.

(iii) Sei p_{AB}^C die Gerade durch C, welche parallel zu $g(A,B)$ verläuft.

Wir erhalten dadurch ein neues größeres Dreieck $\triangle_{PQR}$.
Wir beobachten nun, daß die Eckpunkte des kleineren Dreiecks die Seiten des größeren Dreiecks halbieren:

(i) Da $g(A,C)$ und $p_{BC}^A = g(R,P)$ parallel sind, bilden die vier Punkte A, C, P, B ein Parallelogramm und damit ist $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BP})$. Analog sieht man, daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{RB})$. Also ist $\ell(\overline{RB}) = \ell(\overline{BP})$, und damit B der Mittelpunkt von $\overline{RB}$.

(ii) Genauso sehen wir, daß A der Mittelpunkt von $\overline{QR}$ ist.

(iii) Genauso sehen wir, daß C der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist.

Als nächstes beobachten wir, daß die Höhen von $\triangle_{ABC}$ die Mittelsenkrechten von $\triangle_{PQR}$ sind:

(i) Wir betrachten die Höhe h_{AC}^B auf $\overline{AC}$ durch B. Diese steht senkrecht auf $g(A,C)$ und somit nach Satz 5.23 auch senkrecht auf $g(R,P)$.
Die Höhe h_{AC}^B steht also senkrecht auf $\overline{RP}$ und verläuft durch deren Mittelpunkt B.

(ii) Genauso sehen wir, daß die Höhe h_{BC}^A (auf $\overline{BC}$ durch A) senkrecht auf $\overline{RQ}$ steht und durch deren Mittelpunkt A verläuft.

(iii) Genauso sehen wir, daß die Höhe h_{AB}^C (auf $\overline{AB}$ durch C) senkrecht auf $\overline{QQ}$ steht und durch deren Mittelpunkt C verläuft.

Aber wir wissen bereits aus Satz 5.52, daß die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sich in genau einem Punkt schneiden. Dies beendet den Beweis. **q.e.d.**

Eine weitere Anwendung betrifft die Innenwinkelsumme im Dreieck.

Satz 5.62. *In jedem Dreieck $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{R}^2$ beträgt die Innenwinkelsumme π.*

Beweis. Wir bezeichnen die Innenwinkel mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= \sphericalangle_{BAC} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} && \text{am Eckpunkt A,} \\ \beta &:= \sphericalangle_{CBA} = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} && \text{am Eckpunkt B,} \\ \gamma &:= \sphericalangle_{ACB} = \overrightarrow{CB} \cup \overrightarrow{CA} && \text{am Eckpunkt C.} \end{aligned}$$

Nach Satz 5.56 gibt es eine Gerade p_{AB}^C durch C parallel zu $g(A, B)$.
Die Gerade $g(A, C)$ schneidet beiden parallelen Geraden $g(A, B)$ in A, und p_{AB}^C in C. Der Winkel α und der zu ihm gehörende Stufenwinkel α' sind gleich groß nach Satz 5.23. Ebenso schneidet die Gerade $g(B, C)$ die beiden parallelen Geraden $g(A, B)$ in B, und p_{AB}^C in C. Der Winkel β und der zu ihm gehörende Stufenwinkel β' sind gleich groß nach Satz 5.23.
Da α', γ und β' sich zu einem Vollwinkel ergänzen, folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = \pi$$

wie behauptet. **q.e.d.**

Bemerkung 5.63. Für ein *einfaches (=nicht-überschlagendes) Polygon* mit n Ecken ist die Innenwinkelsumme durch die Formel

$$(n \cdot \pi) - 2\pi = (n - 2)\pi$$

gegeben.

Also Folgerung können wir nun den Satz von Thales herleiten:

Satz 5.64 (Satz von Thales)**.** *Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ verschiedene Punkte und P der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Für den Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ um P mit Radius $r := \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$ gitl: für jeden Punkt $C \in \mathcal{K}(P, r)\backslash\{A, B\}$ ist*

$$\gamma := \angle_{ACB} = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Wir betrachten das Dreieck $\triangle_{ABC}$ mit den Innenwinkeln α, β, γ. Da die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks $\triangle_{ABC}$ auf dem Kreis um P mit Radius r liegen, folgt, daß

$$\ell(\overline{PA}) = \ell(\overline{PB}) = \ell(\overline{PC}) = r.$$

Somit sind die Dreiecke $\triangle_{APC}$ und $\triangle_{BPC}$ gleichschenklig. Es folgt aus Satz 5.44, daß sie auch gleichwinklig sind, also

$$\begin{aligned} \angle_{PCB} &= \angle_{CBP} = \beta, \\ \angle_{PCA} &= \angle_{CAP} = \alpha. \end{aligned}$$

Und wir sehen $\gamma = \alpha + \beta$. Da die Innenwinkelsumme im Dreieck nach Satz 5.62 gerade π ist, erhalten wir

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta)$$

und damit $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. **q.e.d.**

5.8 Die Winkelhalbierende

5.9 Aufgaben

Aufgabe 5.1. Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Es ist

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

genau dann, wenn ....

Aufgabe 5.2. Es seien A, B, C drei kollineare Punkte, so daß B zwischen A und C liegt. Zeige, daß

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

gilt.
Hinweis: *Verwende die Beschreibung der Gerade mithilfe des Aufpunktes A.*

Aufgabe 5.3. Zeige, daß für $A, B \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$A \neq B \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell(\overline{AB}) > 0.$$

Aufgabe 5.4. Es seien P und Q zwei Punkte auf einem Strahl $\overrightarrow{AB}$. Zeige: Wenn $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ})$, dann gilt $P = Q$.
Hinweis: *Verwende eine explizite Beschreibung des Strahls.*

Aufgabe 5.5. Wie könnte man die Länge eines Kreises definieren?

Aufgabe 5.6. Seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit Schnittpunkt P. Zeige, daß deren Scheitelwinkel gleich groß sind.
Hinweis: *Mache Dir den Sachverhalt an einem Bild klar. Man kann zum Beispiel Satz 5.17 (ii) verwenden.*

Aufgabe 5.7. Wir haben gesehen, daß jede längenerhaltende Abbildung auch winkelerhaltend ist. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 5.8. Seien $g_1 \neq g_2$ parallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ und h eine weitere Gerade, welche g_1 und g_2 schneidet. Zeige, daß die Winkelmaße von zwei Ergänzungswinkel zusammen π ergeben.
Hinweis: *Man kann sich am Beweis von Satz 5.23 (i) und (ii) orientieren.*

Aufgabe 5.9. Sei ein Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ vom Radius $r > 0$ gegeben. Zeige, daß der Durchmesser von $\mathcal{K}(P, r)$ gegeben ist durch $2r$.

Aufgabe 5.10. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $\operatorname{diam}(X) = d$. Ist X dann notwendigerweise in einer Kreisscheibe $\mathcal{S}(P, \frac{d}{2})$ vom Radius $\frac{d}{2}$ enthalten?

Aufgabe 5.11. Seien $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ Punkte und $r > 0$. Zeige:

(i) $Q \in \mathcal{K}(P, r) \Longleftrightarrow (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = r^2$.

(ii) $Q \in \mathcal{S}(P, r) \Longleftrightarrow (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 \leqslant r^2$.

Aufgabe 5.12. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$. Zeige:
Ist $r < \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$, so schneiden sich die beiden Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$ nicht.

Aufgabe 5.13. Sei $g = \{A + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Aufpunkt $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Beschreibe einen beliebigen Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g$ mit Hilfe einer Gleichung der Form $y = f(x)$ oder $x = f(y)$.

Aufgabe 5.14. Sei $\mathcal{K}(P, r)$ ein Kreis mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Zeige, daß genau eine der folgenden Aussagen gilt:

(i) Der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ und die Gerade g schneiden sich nicht.

(ii) Der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ und die Gerade g schneiden sich in genau einem Punkt Q.

(iii) Der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ und die Gerade g schneiden sich in zwei Punkten $U \neq V$.

Aufgabe 5.15. Sei $\mathcal{K}(P, r)$ ein Kreis und $Q \neq \mathcal{S}(P, r)$.

(i) Wieviele Tangenten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(ii) Wieviele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(iii) Wieviele Passanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(iv) Wieviele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q und durch P gibt es?

Wie verhält es sich für $Q \in \mathcal{S}(P, r)$?

Aufgabe 5.16. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ Punkte.

(i) Gib eine Definition für den Mittelpunkt P der Strecke $\overline{AB}$ an.

(ii) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$. Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes P von $\overline{AB}$.

(iii) Versuche daraus eine Formel für die Koordinaten des Mittelpunktes P in Abhängigkeit der Koordinaten von A und B anzugeben.

Aufgabe 5.17. Sei $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Zeige, daß gilt

$$\angle_{BAC} = \angle_{ABC} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}).$$

Hinweis: *In der Vorlesung haben wir bereits die umgekehrte Richtung bewiesen.*

Aufgabe 5.18. Sei $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit $\angle_{BAC} = \angle_{ABC}$. Zeige, daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$ ohne im Beweise einen Hilfspunkt einzuführen.

Aufgabe 5.19. Wir wollen Kongruenzsätze für Vierecke untersuchen.

(i) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSSS? D.h. wenn für gegebene Vierecke $\square_{ABCD}$ und $\square_{A'B'C'D'}$ alle entsprechenden Seiten gleich lang sind und ein Innenwinkel gleich groß ist, folgt daraus schon, dass die Vierecke kongruent sind?

(ii) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSWS?

(iii) Was für Kongruenzsätze kennst Du für Vierecke? Kannst Du selber welche finden?

Aufgabe 5.20. Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier Punkte, so daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BD})$ und, so daß der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ mit dem Mittelpunkt von $\overline{BD}$ übereinstimmt. Zeige, daß A, B, C, D die Eckpunkte eines Rechtecks sind.

Aufgabe 5.21. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ und m_{AB} die Mittelsenrechte zu $\overline{AB}$. Zeige

$$\{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\} \subset m_{AB}.$$

Aufgabe 5.22. Es sei g eine Gerade und $P \notin g$ ein Punkt.

(i) Fälle mit Zirkel und Lineal das Lot von P auf g.

(ii) Beschreibe in Worten die Konstruktion, welche Du gerade ausgeführt hast.

(iii) Gib eine kurze Begründung, warum diese Konstruktion das Lot von P auf g liefert.

Aufgabe 5.23. Es seien $P_1, \ldots, P_4$ Punkte in der Ebene, welche ein Viereck bilden. Wir nehmen an, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Genauer gesagt, wir nehmen an, dass folgende Aussagen gelten:

(i) die Seiten $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$ sind gleich lang,

(ii) die Seiten $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_4P_1}$ sind gleich lang.

Folgt daraus schon, dass das Viereck ein Parallelogramm ist?

6 Lösungen der Aufgaben

Hier werden jeweils nach der zweiten Übung die Lösungen erscheinen.

6.1 Lösungen der Aufgaben in §1

Aufgabe 1.1. Versuche eine möglichst genaue Formulierung des Innensummenwinkelsatzes im Dreieck anzugeben.

Lösung. Die Aussage „Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt 180°“ wird fast jeder verstehen, jedoch ist sie mathematisch gesehen nicht besonders genau. Als erstes muß man sich fragen: Was ist ein Dreieck? Etwa: eine von drei geraden Linien begrenzte Figur. Hier kann man weiter machen: Was sind gerade Linien? Wo befindet es sich? Wenn wir uns ein Dreieck auf einem Ball vorstellen stimmt der Innenwinkelsatz ja nicht mehr. Also sollten wir spezifizieren, daß es in der euklidischen Ebene liegt. Was sind dessen Innenwinkel? Sollten wir die Eckpunkte des Dreiecks definieren und erwähnen? Wäre es besser von Winkelmaß π zu sprechen, oder gar von dem Doppelten eines rechten Winkels? Etc. Wir sehen also, daß es selbst für eine scheinbar so einfach Aussage schwer ist, eine präzise Frmulierung zu finden, und wir ein ordentliches Fundament benötigen.

Aufgabe 1.2. Ein gängiger Schulbeweis des Innenwinkelsummensatzes des Dreiecks scheint zu sein, daß man einen Bleistift an eine Kante des Dreiecks anlegt, um jede Ecke schiebt, bis er wieder an der ursprünglichen Stelle ankommt, und dann beobachtet, daß er sich um 180°C (oder das Winkelmaß π) gedreht hat.
Begründe, daß dieser Beweise logisch nicht zulässig ist, und überlege Dir, wie man ihn retten kann.

Lösung. Wir können den Bleistift um ein beliebiges n-Eck schieben, und sollten feststellen, daß die Spitze, falls $n \geqslant 4$ gerade ist, immer in die gleiche Richtung wie zu Beginn zeigt, und falls $n \geqslant 3$ ungerade ist, immer in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Also muß für n gerade die Innenwinkelsumme $k_n \cdot 2\pi$ sein für eine natürliche Zahl $k_n \in \mathbb{N}$, die von n abhängt. Für n ungerade muß die Innenwinkelsumme $\pi + k_n \cdot 2\pi$ sein wobei $k_n \in \mathbb{N}_0$ wieder von n abhängt Wir wollen also k_3 bestimmen. Für ein Dreieck beobachten wir, daß jeder einzelne Innenwinkel echt kleiner als π sein muß. Somit ist die Innenwinkelsumme $< 3\pi = \pi + 1 \cdot 2\pi$. Das ist also nur möglich, wenn $k_3 = 0$ ist.

6.2 Lösungen der Aufgaben in §2

Aufgabe 2.1. Versuche zu definieren, was ein Punkt ist.

Lösung. Mathematische Definitionen sind im Allgemeinen anders aufgebaut als Definitionen, die wir aus dem Alltag, oder sogar anderen Wissenschaften kennen.
Nichtmathematische Definitionen bestehen meist aus einem Oberbegriff und artbestimmenden Merkmalen. Das heißt, Begriffe werden definiert, indem von bereits bekannten Objekten, die allgemeiner sind als die zu definierenden Objekte, bestimmte Eigenschaften gefordert werden, die den zu definierenden Begriff bestimmen.
Nach diesem Schema sind auch alle Definitionen von Euklid aufgebaut. Bei genauem Hinschauen offenbart sich aber die Schwierigkeit bei der Definition von solch grundlegender Begriffe wie „Punkt“ oder „Gerade“: es stehen noch keine Oberbegriffe und auch keine Eigenschaften, die zur Definition genutzt werden können, zur Verfügung.
Bestimmte Objekte und Relationen müssen also aus dem Nichts definiert werden. Erst wenn einige grundlegende Begriffe zur Verfügung stehen, kann die Definition anderer

Objekte auf die bekannte Weise erfolgen. Das geschieht, indem Eigenschaften postuliert werden, denen die auf diese Weise zu bestimmenden Objekte genügen sollen. Diesen axiomatischen Zugang werden wir im Abschnitt 2 kennenlernen.

Aufgabe 2.2. Gib basierend auf Euklid's Axiomensystem eine Konstruktion an, wie man von der größeren zweier gegebener ungleicher Strecken eine Strecke gleich der kleineren abträgt.

Lösung. Seien $[AB]$ und $[CD]$ die beiden gegebenen Strecken, und nimm an, daß AB die größere der beiden ist. Nach Proposition 2.2 können wir an A eine Strecke AE mit der Länge von $[CD]$ antragen. Nach Postulat (P3) können wir um A einen Kreis mit Radius $\overline{AE}$ ziehen. Dieser schneidet $[AB]$ in einem Punkt F. Da A der Mittelpunkt des Kreises ist, ist nach Definition (D15) $\overline{AF}$ gleich $\overline{AE}$. Aber dies war auch gleich $\overline{CD}$. Somit ist nach Axiom (A1) $\overline{AF}$ gleich $\overline{CD}$, und wir haben eine Strecke der gleichen Länge wie $\overline{CD}$ von $\overline{AB}$ abgetragen. **q.e.f.**

Aufgabe 2.3. Zeige basierend auf Euklid's Axiomensystem, daß in einem gleichseitigen Dreieck die Basiswinkel übereinstimmen.

Lösung. Sei $\triangle_{ABC}$ ein gleichseitiges Dreieck definiert in Definition (D20), mit den Schenkeln $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Wir behandeln es als zwei Dreiecke: $\triangle_{BAC}$ und $\triangle_{CAB}$. Diese beiden Dreiecke haben zwei gleiche Seiten: die Seite$\overline{BA}$ des ersten Dreiecks ist gleich der Seite $\overline{CA}$ des zweiten Dreiecks, und die Seite $\overline{AC}$ des ersten Dreiecks ist gleich der Seite $\overline{AB}$ des zweiten Dreiecks. Natürlich stimmen auch die Zwischenwinkel überein: $\sphericalangle_{BAC}$ des ersten Dreiecks gleicht $\sphericalangle_{CAB}$ des zweiten Dreiecks.
Nach Proposition 2.4 sind die Dreiecke gleich. Insbesondere ist der Winkel $\sphericalangle_{CBA}$ des ersten Dreiecks gleich dem Winkel $\sphericalangle_{BCA}$ des zweiten Dreiecks, und der Winkel $\sphericalangle_{ACB}$ des ersten Dreiecks gleich dem Winkel $\sphericalangle_{ABC}$ des zweiten. **q.e.d.**

Aufgabe 2.4. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ und m_{AB} die Mittelsenrechte zu $\overline{AB}$. Zeige

$$\{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\} \subset m_{AB}.$$

Aufgabe 2.5. Zeige basierend auf Euklid's Axiomensystem, daß wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, auch die jeweils gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind.

Lösung. Sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck, bei dem $\sphericalangle_{ABC}$ gleich $\sphericalangle_{ACB}$ ist. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\overline{AB}$ ist nicht gleich $\overline{AC}$, dann ist eine der beiden größer. (An dieser Stelle verwenden wir das Gesetz der Trichotomie.) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overline{AB}$ echt größer als $\overline{AC}$. Nach Proposition 2.3 können wir von $\overline{AB}$ eine Strecke $\overline{DB}$ gleich $\overline{AC}$ abtragen. Wir verbinden mittels Postulat (P1) D und C und erhalten ein Dreieck $\triangle_{DBC}$.
Die beiden Dreiecken $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{DBC}$, haben die Seite $[BC]$ gemein. weiterhin ist die Seite $\overline{AB}$ des ersten Dreiecks gleiche der Seite $\overline{DB}$ des zweiten Dreiecks, und die Winkel $\sphericalangle_{CBD}$ und $\sphericalangle_{ACB}$ stimmen überein. Daher müßen nach Proposition 2.4 die Dreiecke selbst gleich sein. Aber nach Konstruktion ist $\triangle_{DBC}$ ein Teil von $\triangle_{ABC}$ und nach Axiom (A5) muß also $\triangle_{ABC}$ größer als $\triangle_{DBC}$ sein. Widerspruch. **q.e.d.**

6.3 Lösungen der Aufgaben in §3

Aufgabe 3.1. Zeige daß nach den Axiomen 1-4 aus Beispiel 3.3 gilt:
Jede Reihe enthält genau zwei Bäume. Insgesamt gibt es genau vier Bäume und sechs Reihen.

Lösung. Nach Satz 2 wissen wir, daß jede Reihe mindestens zwei Bäume enthält. Wir müssen zeigen, daß jede Reihe höchstens zwei Bäume enthält. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es gibt $R \in \mathbb{R}$ so daß es paarweise verschiedene $x, y, z \in \mathbb{B}$ gibt mit $x, y, z \in R$. Nach Satz 1 gehört jeder Baum zu mindestens zwei Reihen. Also gibt es $Z \neq R$ in $\mathbb{R}$ mit $z \in Z$. Dann gilt nach Axiom 2, $x, y \notin Z$. Nach Satz 2 enthält jede Reihe mindestens zwei Bäume. Also gibt es $r \neq z$ in $\mathbb{B}$ mit $r \in Z$. Nach Konstruktion gilt $r \neq x, y$. Nach Axiom 2 gibt es genau ein $X \in \mathbb{R}$ mit $x, r \in X$ und genau ein $Y \in \mathbb{R}$ mit $y, r \in Y$. Und e gilt jeweils $z, y \notin X$ und $z, x \notin Y$.
Nach Axiom 3 gibt es zu de Reihen X, Y, Z jeweils eine disjunkte Reihe A, B, C. Wegen der Eindeutigkeit von Axiom 3 können diese selbst nicht disjunkt sein. Weiterhin können keine zwei dieser Reihen mehr als einen Punkt gemeinsam haben, sonst würden sie nach Axiom 2 zusammenfallen. Es gilt also $A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C = \{m\}$ mir $m \in \mathbb{B}$. Der Baum m kann natürlich in keiner der Reihen X, Y, Z liegen.
Angenommen m ist in der Reihe R. Da A, B, C verschieden sind, gibt es drei weitere Bäume a, b, c nicht in R. Fallunterscheidung. Fall 1: mindestens eines der a, b, c steht außerhalb der Reihen X, Y, Z. Damit erhalten wir eine neue Reihe, die zu X, Y und Z disjunkt ist, was unmöglich ist. Sind dagegen alle auf den Reihen X, Y, Z verteilt, so erhalten wir nach weiteren Argumenten wieder eine Reihe, die zu mehreren anderen Reihen disjunkt ist. Also muß gelten, daß m in keiner der bereits erhaltenen Reihen X, Y, Z, R ist. Nach Axiom 2 muß es jeweils eine Reihe geben, die m und x, m und y, und m und z enthält. Die erste ist disjunkt zu Y und Z, die zweite zu X und Z und die dritte zu X und Y. Dies ist wieder ein Widerspruch zu der Eindeutigkeit von Axiom 3. Damit haben wir gezeigt, daß keine Reihe mehr als zwei Bäume enthalten kann, in anderen Worten, jede Reihe enthält genau zwei Bäume.
Nach der Konstruktion in Satz 3 erhalten wir zunächst drei paarweise verschiedene, nicht disjunkte Reihen, X, Y, Z, die jeweils zwei der Elemente x, y, z enthalten und deren sich jeweils in einem dieser Elemente schneiden. Danach finden wir zu X, Y, Z jeweils eine disjunkte Reihe U, V, W. Wie oben argumentiert man, daß diese sich in einem gemeinsamen Punkt m schneiden müssen. Dieser Punkt m liegt jeweils mit jedem der x, y, z in einer Reihe, die eine von U, V, W bildet. Insgesamt erhalten wir so ein Gebilde, das wie ein Tetraeder aussieht, also 6 Reihen (Kanten des Tetraeders) und 4 Bäume (Ecken des Tetraeders) enthält.

Aufgabe 3.2. Interessanterweise haben wir in Beispiel 3.3 nie benutzt, daß wir mit Bäumen und Reihen arbeiten. Genauso hätten wir alles in Form des Schildkrätenclubs formulieren können: Die Mitglieder des Schildkrötenclubs sind Schildkröten, sie finden sich gelegentlich zusammen, um Ausschüße zu bilden. Im Moment ist die Situation folgendermaßen:

(i) Jede Schildkröte gehört mindestens einem Ausschuß an.

(ii) Je zwei Schildkröten gehören genau einem gemeinsamen Ausschuß an.

(iii) Zu jedem Ausschuß findet sich genau ein anderer Ausschuß, dessen Mitglieder alle dem zuerst genannten Ausschuß nicht angehören.

Wir können also folgern: Der Club hat genau vier Mitglieder, und es gibt genau sechs Ausschüße.
Man spricht von Modellen des Axiomensystems.
Finde ein rein geometrisches Modell des Axiomensystems, und folgere, daß das Axiomensystem Widesspruchsfrei ist.

Lösung. Man überzeugt sich leicht, daß ein Tetraeder alle Axiome erfüllt.

Aufgabe 3.3. Zeige, daß die Axiomensystem (G1')-(G2') und (G1)-(G2)-(G3) aus Beispiel 3.5 äquivalent sind.
Hinweis: *Zeige hierzu (unter Benutzung von (G1) beziehungsweise (G1')), daß (G2) und (G3) aus (G2') folgen und umgekehrt.*

Lösung. Natürlich ist (G1)=(G1'). Wir nehmen an, daß (G2') gilt. Sei $x \in G$. Wähle in (G2') $a = b = x$. Dann gibt es nach dem ersten Teil von (G2') $e_x \in G$ mit $x \circ e_x = x$. Also ist e_x rechtsneutral zu x. Für jedes weitere $y \in G$ gibt es nach dem zweiten Teil von (G2') $z \in G$ mit $z \circ x = y$. Damit ist mit (G1')

$$y = z \circ x = z \circ (x \circ e_x) = (z \circ x) \circ e_x = y \circ e_x.$$

Also ist e_x rechtsneutrales Element von G, und wir bezeichnen es fortan mit e.
Nach dem ersten Teil von (G2') gibt es nun für jedes $x \in G$ ein Element $x^{-1} \in G$ mit $x \circ x^{-1} = e$. x^{-1} ist also rechtsinvers zu x. Wir zeigen, daß es auch linksinvers ist:

$$x^{-1} \circ x = (x^{-1} \circ x) \circ e = (x^{-1} \circ x) \circ (x^{-1} \circ (x^{-1})^{-1}) = x^{-1} \circ (x \circ x^{-1}) \circ (x^{-1})^{-1} = x^{-1} \circ (x^{-1})^{-1} = e.$$

Wir zeigen nun, daß e auch linksinverses ist, denn für jedes x gilt

$$e \circ x = (x \circ x^{-1}) \circ x = x \circ (x^{-1} \circ x) = x \circ e.$$

Damit haben wir (G2) und (G3) gezeigt.
Nehmen wir nun an, daß (G2) und (G3) gilt. Dann gibt es ein neutrales Element, sowie zu jedem Element inverse. Sei $a, b \in G$. Wähle $x = a^{-1} \circ b$ und $y = b \circ a^{-1}$. Dann gilt $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$. Damit gilt (G2').

Aufgabe 3.4. Betrachte folgendes Axiomensystem der Ebene und untersuche es auf Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit:

(E1) Geraden sind Mengen von Punkten.

(E2) Zwei voneinander verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

(E3) Durch jeden Punkt der Ebene gibt es zu jeder Geraden, die diesen Punkt nicht enthält, genau eine Gerade, die mit der gegebenen Gera- den keinen gemeinsamen Punkt hat.

(E4) Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält.

Hinweise: *Finde ein Modell, um die Widerspruchsfreiheit zu zeigen.*
Um die Unabhängigkeit zu widerlegen, zeige, daß (E2) aus den übrigen Axiomen folgt.
Formuliere eine Aussage, die nicht bewiesen werden kann, was zeigt, daß das System nicht vollständig ist.

Lösung. **Widerspruchsfreiheit:** Ein Modell ist $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Definition von Geraden und Punkten.

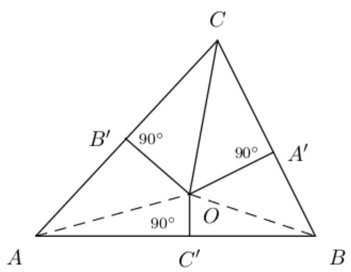
Unabhängigkeit: Wir zeigen, daß man (E2) aus (E1) und (E4) herleiten kann:
Angenommen es gibt zwei verschiedene Geraden g, h mit zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in g \cap h$. (Wir brauchen (E1) hier, damit die Aussage überhaupt Sinn macht.) Nach (E4) gibt es zu $P \neq Q$ genau eine Gerade, die beide Punkt enthält. Also folgt $g = h$. Widerspruch.

Vollständigkeit: Mit den gegebenen Axiomen kann man zum Beispiel nicht zeigen, daß jede Gerade mindestens drei Punkte enthält.

Aufgabe 3.5. Euklid hatte versucht aus Beobachtungen (die wahrscheinlich oft auf Skizzen basierten), ein konsistentes System zu entwickeln. Diese Aufgabe zeit, daß es gefährlich ist, wenn man sich nur auf den Augenschein verläßt. Betrachte folgende Aussage und den Beweis dazu, wobei alles Wissen aus der Schulgeometrie verwendet werden darf. Arbeite den Beweis nahc, und finde den Fehler.
Behauptung: *Jedes Dreieck ist gleichschenklig.*

Lösung. Zu Beginn des Beweises wird folgende Konstruktion durchgeführt:

Im Dreieck $\triangle_{ABC}$ wird der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle_{ACB}$ mit der Mittelsenkrechten auf $[AB]$ konstruiert. Wir bezweichnen ihn mit O. Von O fällen wir ein Lot auf AC und BC.



Jedoch ist die Zeichnung irreführend. Die Winkelhalbierende $\sphericalangle_{ACB}$ und die Mittelsenkrechte auf $[AB]$ schneiden sich im Allgemeinen nicht im Inneren des Dreiecks. Dies wird offensichtlich, wenn man ein extremeres Dreieck zur Anschauung verwendet.

6.4 Lösungen der Aufgaben in §4

Aufgabe 4.1. Zeige, daß das Beispiel 4.8 ein Modell der Inzidenzaxiome ist.

Lösung. Axiom 4.2 ist erfüllt, da jede der drei Geraden genau zwei Punkte enthält.
Axiom 4.3 ist erfüllt, da je zwei der drei Punkte eine Gerade bilden.
Axiom 4.6 ist erfüllt, da das Modell genau drei Punkte enthält, und diese liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden.

Aufgabe 4.2. Es seien A, B zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Gerade

$$g \ := \ \{A + \lambda \cdot (B - A) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Es sei zudem

$$h \ = \ \{Q + \lambda \cdot w \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

noch eine weitere Gerade, welche durch A und B verläuft. Zeige, daß $h \subset g$.
***Hinweis**: Es muß also gezeigt werden, daß ein beliebiger Punkt $Q + \lambda \cdot w \in h$ auch schon in g liegt.*

Lösung. Sei $P = Q + \lambda \cdot w$ ein beliebiger Punkt in h. Da A und B auch in h sind, gibt es $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, so daß

$$A = Q + \mu \cdot w \qquad\qquad B = Q + \nu \cdot w.$$

Der Richtungsvektor $B - A$ von g kann dann geschrieben werden als

$$B - A = (\nu - \mu) \cdot w,$$

und da $B - A \neq 0$ ist auch $\nu - \mu \neq 0$. Wir schreiben nun P als

$$\begin{aligned} P &= Q + \lambda \cdot w = \\ &= Q + \lambda \cdot w + \mu \cdot w - \mu \cdot w \\ &= (Q + \mu \cdot w) + (\lambda - \mu) \cdot w \\ &= (Q + \mu \cdot w) + (\lambda - \mu)\frac{\nu - \mu}{\nu - \mu} \cdot w \\ &= (Q + \mu \cdot w) + \frac{\lambda - \mu}{\nu - \mu}(\mu - \nu) \cdot w = A + \frac{\lambda - \mu}{\nu - \mu}(B - A) \end{aligned}$$

Und dieser Punkt ist offensichtlich in g.

Aufgabe 4.3. Wir betrachten die rationale Ebene $\mathbb{Q}^2$.

(i) Gib eine geeignete Definition von Geraden in $\mathbb{Q}^2$ an.

(ii) Zeige, daß damit $\mathbb{Q}^2$ ein Modell der Inzidenzaxiome ist.

Lösung. **(i)** Eine Gerade in $\mathbb{Q}^2$ kann man definieren als

$$g := \{Q + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{Q}\} \qquad \text{mit} \qquad Q \in \mathbb{Q}^2, 0 \neq v \in \mathbb{Q}^2$$

Oder als Schnitt der Geraden in $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{Q}^2$, die (mindestens) einen rationalen Punkt enthalten.

(ii) Da $|\mathbb{Q}| > 2$, hat jede Gerade mehr als zwei Punkte, also gilt Axiom 4.2.
Seien $A \neq B \in \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Wir haben gezeigt, daß es genau eine reelle Gerade $g(A, B) \subset \mathbb{R}^2$ gibt, die A, B enthält. Setze $g_{\mathbb{Q}}(A, B) := g(A, B) \cap \mathbb{Q}^2$. Das ist die eindeutige Gerade in $\mathbb{Q}^2$, die A und B enthält.
Es ist klar, daß $\mathbb{Q}^2$ mindestens drei nicht-kollineare Punkte enthält, z.B. $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$.

Aufgabe 4.4. Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene, und $A \neq B \in \mathbb{E}$. Wie könnte man mit etwas linearer Algebra die Strecke $\overline{AB}$ und den Strahl $\overrightarrow{AB}$ beschreiben?

Lösung.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in [0, 1]\} \\ \overrightarrow{AB} &= \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.5. Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene, und $A \neq B \in \mathbb{E}$. Zeige:

(i) $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset g(A, B)$.

(ii) $\overline{AB} = \overline{BA}$.

(iii) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$.

(iv) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = g(A, B)$.

Gilt dies für alle Ebenen $\mathcal{E}$, die die Axiome 4.17,4.18 und 4.19 erfüllen?

Lösung. Ja, das gilt für beliebige Ebenen $\mathcal{E}$ mit den Axiomen 4.17,4.18 und 4.19. Wir werden die Beweise mit der allgemeinen Definition durchführen, aber es ist auch ok, die Beweise mit den Definitionen in $\mathbb{R}^2$ durchzuführen.

(i) Nach Axiom 4.17 können nur Punkte, die auf einer Geraden liegen, die Zwischenrelation erfüllen. Also sind die beiden Mengen

$$\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - B - X\}$$

natürlich in $g(A, B)$ enthalten, und nach ihrer Definition ist klar, daß $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$.

(ii) Da nach Axiom 4.18 $A - X - B$ genau dann gilt, wenn $B - X - A$ gilt, ist

$$\overline{AB} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid A - X - B\} = \{B\} \cup \{A\} \cup \{X \in \mathcal{E} \mid B - X - A\} = \overline{BA}$$

wie behauptet.

(iii) Da $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB}$ und $\overline{AB} = \overline{BA} \subset \overrightarrow{BA}$ ist klar, daß $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.
Zeigen wir noch $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \subset \overline{AB}$: Sei also $X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Wäre $X \notin \overline{AB}$, so müßte gleichzeitig $A - B - X$ und $B - A - X$ gelten. Das ist aber nicht möglich nach Axiom 4.19. Also ist $X \in \overline{AB}$.

(iv) Da $\overrightarrow{AB} \subset g(A, B)$ und $\overrightarrow{BA} \subset g(A, B)$, ist auch $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset g(A, B)$.
Zeigen wir noch $g(A, B) \subset \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$: Sei $X \in g(A, B)$. Ist $X = A$ oder $X = B$, so ist $X \in \overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Ist $X \neq A$ und $X \neq B$ (also A, B, X paarewise verschieden), dann gilt nach Axiom 4.19 entweder $A - X - B$ (also $X \in \overline{AB}$), oder $A - B - X$, oder $X - A - B$. In jedem fall ist $X \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

Aufgabe 4.6. Sei $g := \{Q + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Wie könnte man die Mengen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ aus Satz 4.30 mit etwas linearer Algebra beschreiben, und vielleicht die Aussage sogar beweisen?

Lösung. Sei $w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, der linear unabhängig von v ist. (Insbesondere ist $W \neq 0$. Dann ist

$$\mathbb{R}^2 = \{Q + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

als (affine) Menge (nicht als Vektorraum), und g ist die Teilmenge, für die $\mu = 0$ ist. Die Halbebenen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ können dann geschrieben werden als

$$\mathcal{H}_1 = \{Q + \lambda v + \mu w \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}_{<0}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_2 = \{Q + \lambda v + \mu w \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Diese sind sind natürlich disjunkt, und erfüllen $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup g = \mathbb{R}^2$ und alle Punkte in $\mathcal{H}_1$ (bzw. $\mathcal{H}_2$) liegen auf der gleichen Seite von g.

Aufgabe 4.7. Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschiedene Punkte. Wie könnte man folgende Objekte mit etwas linearer Algebra beschreiben:

(i) den Winkel $\sphericalangle_{BAC}$?

(ii) das Innere $\mathcal{I}(\sphericalangle_{BAC})$ des Winkels $\sphericalangle_{BAC}$?

(iii) das Dreieck $\triangle_{ABC}$?

(iv) das Innere $\mathcal{I}(ABC)$ dieses Dreiecks?

Lösung. **(i)** Per Definition ist $\sphericalangle_{BAC} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$. Wir wissen aus einer früheren Aufgabe, daß

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\},\\ \overrightarrow{AC} &= \{A + \lambda \cdot (C - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\sphericalangle_{BAC} = \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\} \cup \{A + \lambda \cdot (C - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}.$$

(ii) Nach Definition ist $\mathcal{I}(\sphericalangle_{BAC}) = \mathcal{H}(g(A,B),C) \cap \mathcal{H}(g(A,C),B)$. Wir wissen, daß

$$\begin{aligned}g(A,B) &= \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},\\ g(A,C) &= \{A + \nu \cdot (C - A) \mid \nu \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Wir können $\mathcal{H}(g(A,B),C)$ und $\mathcal{H}(g(A,C),B)$ beschreiben, indem wir jeweils einen zu $B - A$, beziehungsweise $C - A$ linear unabhängigen Vektor wählen. Da A, B, C nicht kollinear sind, sind $B - A$ und $C - A$ linear unabhängig. Es gilt also nach der vorherigen Aufgabe

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(g(A,B),C) &= \{A + \lambda_1 \cdot (B - A) + \mu_1 \cdot (C - A) \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}, \mu_1 \in \mathbb{R}_{>0}\},\\ \mathcal{H}(g(A,C),B) &= \{A + \mu_2 \cdot (C - A) + \lambda_2 \cdot (B - A) \mid \mu_2 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}\}.\end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\sphericalangle_{BAC}) &= \mathcal{H}(g(A,B),C) \cap \mathcal{H}(g(A,C),B)\\ &= \{A + \lambda \cdot (B - A) + \mu \cdot (C - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, \mu \in \mathbb{R}_{>0}\}\\ &= \{(1 - \lambda - \mu) \cdot A + \lambda \cdot B + \mu \cdot C \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}\}\\ &= \{\nu \cdot A + \lambda \cdot B + \mu \cdot C \mid \nu \in \mathbb{R}_{<1}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}, \nu + \lambda + \mu = 1\}\end{aligned}$$

wo wir die Substitution $\nu := 1 - \lambda - \mu$ benutzt haben, und die Ungleichung

$$\nu = 1 - \lambda - \mu = 1 - (\lambda + \mu) < 1,$$

da $\lambda + \mu > 0$.

(iii) Per Definition ist $\triangle_{ABC} = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. Wir wissen aus früheren Aufgaben, daß

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in [0,1]\},\\ \overline{CA} &= \{C + \lambda \cdot (A - C) \mid \lambda \in [0,1]\},\\ \overline{BC} &= \{B + \lambda \cdot (C - B) \mid \lambda \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Also ist

$$\triangle_{ABC} = \{A+\lambda\cdot(B-A) \mid \lambda \in [0,1]\} \cup \{C+\lambda\cdot(A-C) \mid \lambda \in [0,1]\} \cup \{B+\lambda\cdot(C-B) \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

(iv) Per Definition ist

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(ABC) &= \mathcal{I}(\sphericalangle_{BAC}) \cap \mathcal{I}(\sphericalangle_{CBA}) \cap \mathcal{I}(\sphericalangle_{ACB}) \\ &= \mathcal{H}(g(A,B),C) \cap \mathcal{H}(g(A,C),B) \cap \mathcal{H}(g(B,C),A) \end{aligned}$$

Wir verwenden die Beschreibung des Inneren eines Winkels von oben:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(ABC) =& \{\nu_1 \cdot A + \lambda_1 \cdot B + \mu_1 \cdot C \mid \nu_1 \in \mathbb{R}_{<1}, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}_{>0}, \nu_1 + \lambda_1 + \mu_1 = 1\} \\ & \cap \{\nu_2 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \mu_2 \cdot C \mid \mu_2 \in \mathbb{R}_{<1}, \lambda_2, \nu_2 \in \mathbb{R}_{>0}, \nu_2 + \lambda_2 + \mu_2 = 1\} \\ & \cap \{\nu_3 \cdot A + \lambda_3 \cdot B + \mu_3 \cdot C \mid \lambda_3 \in \mathbb{R}_{<1}, \nu_3, \mu_3 \in \mathbb{R}_{>0}, \nu_3 + \lambda_3 + \mu_3 = 1\} \\ =& \{\nu \cdot A + \lambda \cdot B + \mu \cdot C \mid 0 < \nu, \lambda, \mu < 1, \nu + \lambda + \mu = 1\} \\ =& \{\nu \cdot A + \lambda \cdot B + \mu \cdot C \mid \nu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}, \nu + \lambda + \mu = 1\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.8. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade. Im Beweis von Satz 4.30 haben wir gesehen, daß dies eine Äquivalenzrelation induziert. Seien $A \nsim B$ und $C \notin g$ ein weiterer Punkt. Zeige, daß $C \sim A$ oder $C \sim B$.

Lösung. Ist $C \sim A$, so sind wir fertig. Sei also $C \nsim A$. Wir zeigen $C \sim B$.

1. Fall Angenommen A, B, C sind nicht kollinear. Da $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$ und $\overline{AC} \neq \varnothing$ folgt nach Axiom 4.26 $\overline{BC} \cap g = \varnothing$, also $C \sim B$.

2. Fall Angenommen A, B, C liegen auf einer Geraden h. Da $A, B, C \notin g$, ist $g \neq h$. Die Geraden g und h haben höchstens einen Schnittpunkt. Da jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält, gibt es $D \in g$ mit $D \notin h$. Wir finden nach Axiom 4.24 einen Punkt E, so daß C zwischen D und E liegt. Da $g(CD) \neq g$, und folgt $E \notin g$, und $\overline{EC} \cap g = \varnothing$, denn der eindeutige Schnittpunkt von $g(EC)$ mit g ist $D \notin \overline{EC}$. Also $C \sim E$. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und $A \nsim C$, folgt $E \nsim A$. Die Punkte E, A, B sind nicht kollinear. Wir wenden auf diese den 1. Fall an. Aus $E \nsim A$ und $A \nsim B$, folgt also $E \sim B$. Zusammen mit $C \sim E$ folgt $C \sim B$.

Aufgabe 4.9. Sei $\mathbb{E} := \mathbb{R}^2$ die reelle Ebene, und $A \neq B \in \mathbb{E}$. Zeige, daß die Strecke $\overline{AB}$ unendlich viele Punkte enthält, und zeichne ein entsprechendes Bild.

Lösung. Es genügt den Beweis von Lemma 4.28 in dieser konkreten Situation zu wiederholen.

Aufgabe 4.10. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Zeige, daß es $C \in \mathbb{R}^2$ gibt, so daß $A - B - C$.
Hinweis: *Gib eine mathematische Beschreibung der Geraden $g(A,B)$ an und benutze dies um einen Punkt C anzugeben, der auf $g(A,B)$ liegt, so daß B zwischen A und C liegt.*

Lösung. Die Gerade $g(A,B)$ ist gegeben durch

$$g \;:=\; \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir erhalten $A = A + 0 \cdot (B - A)$ für $\lambda = 0$ und $B = A + 1 \cdot (B - A)$ für $\lambda = 1$. Für ein beliebiges $\lambda > 1$ (z.B. können wir konkrete $\lambda = 2$ wählen), ist $C = A + \lambda \cdot (B - A)$ (also z.B. $C = A + 2 \cdot (B - A)$) ein Punkt auf $g(A,B)$ und B liegt zwischen A und C.

Aufgabe 4.11. Sei $\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(i) Erstelle eine Skizze von $\mathcal{D}$.

(ii) Die Geraden von $\mathcal{D}$ seien die Abschnitte von gewöhnlichen Geraden g in $\mathbb{R}^2$, die innerhalb von $\mathcal{D}$ liegen. Gib eine mathematische Beschreibung dieser Geraden an.

(iii) Zeige, daß $\mathcal{D}$ mit diesen Geraden die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt.

(iv) Trage in der Skizze einen Winkel ein, und einen Punkt im Inneren des Winkels, so daß dieser Punkt auf keiner Strecke zwischen zwei Punkten auf den beiden Schenkeln liegt.

Lösung. **(i)** Die Menge $\mathcal{D}$ ist das Innere der Einheitskreisscheibe.

(ii) Jede Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ ist von der Form $g := \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, also sind die Geraden von $\mathcal{D}$ von der Form

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{D}} &:= \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{D} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (P_1 + \lambda v_1)^2 + (P_2 + \lambda v_2)^2 < 1 \right\} \end{aligned}$$

wobei es genügt (aber nicht notwendig ist) nur Punkte P in $\mathcal{D}$ zu betrachten.
(iii) Die Inzidenzaxiome:

Axiom 4.2 Jede Gerade $g_{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (P_1 + \lambda v_1)^2 + (P_2 + \lambda v_2)^2 < 1 \right\}$ enthält den Punkt P. Sei C ein Schnittpunkt von $g_{\mathcal{D}}$ mit dem Einheitskreis, also $C \notin \mathcal{D}$ und $C - P \neq 0$ ein Vielfaches von v. Dann ist $P + \frac{1}{2}(C - P)$ in $\mathcal{D}$.

Axiom 4.3 Es ist klar, daß je zwei verschiedene Punkte auf einer Geraden liegen.

Axiom 4.6 Drei Punkte, die nicht kollinear sind, und in $\mathcal{D}$ liegen, sind:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Die Anordnungsaxiome: Wir benutzen die gleiche Zwischenrelation wie bei $\mathbb{R}^2$. Sei

$$g_{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, (P_1 + \lambda v_1)^2 + (P_2 + \lambda v_2)^2 < 1 \right\}$$

und $A_1 = P + \lambda_1 v$, $A_2 = P + \lambda_2 v$, $A_3 = P + \lambda_3 v$ drei Punkte in $g_{\mathcal{D}}$. Dann setzen wir

$$A_1 - A_2 - A_3 \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \qquad \text{oder} \qquad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3.$$

Die Axiome 4.17, 4.18, 4.19, 4.24, 4.26 gelten, da diese für $\mathbb{R}^2$ gelten.

(iv) Wir können einen beliebigen spitzen Winkel mit Scheitelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen. Die Sehne zwischen den beiden Schnittpunkten der Schenkel mit dem Einheitskreis teilt das Kreissegment in zwei Teile. Jeder Punkt zwischen Sehne und Kreislinie erfüllt die Voraussetzung.

Aufgabe 4.12. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $\alpha = \sphericalangle_{BAC}$ und D ein weitere Punkt in $\mathcal{E}$, sowie $\alpha_- := \sphericalangle_{BAD}$ und $\alpha_+ \sphericalangle_{DAC}$. Zeige:

$$D \in \mathcal{I}(\alpha) \qquad :\Leftrightarrow \qquad C \in \mathcal{A}(\alpha_-) \text{ und } B \in \mathcal{A}(\alpha_+).$$

Hinweis: *Fertige eine Skizze an, die die Situation illustriert. Überlege Dir, daß falls $D \in \mathcal{I}(\alpha)$ der Schnittpunkt von $g(A, D)$ und $g(B, C)$ auch in $\mathcal{I}(\alpha)$ liegt.*

Lösung. Ist $D \in \mathcal{I}(\alpha)$, so zeigt man wie im Beweis von Korollar 4.41, daß es eine Schnittpunkt $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} =: X$ gibt. Also gilt $B - X - C$ und damit $C \in \mathcal{A}(\alpha_-)$ und $B \in \mathcal{A}(\alpha_+)$.
Ist andererseits $C \in \mathcal{A}(\alpha_-)$ und $B \in \mathcal{A}(\alpha_+)$, so liegen B und C auf verschiedenen Seiten von $g(A, D)$, und es gibt $X \in \overline{BC} \cap g(A, D)$. Dann liegt nach Satz 4.38 $X \in \mathcal{I}(\alpha)$ und somit nach Satz 4.40 auch D.

Aufgabe 4.13. Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Wir bezeichnen mit $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an g.

(i) Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gilt $\sigma_g(P) = P$ genau dann, wenn ....

(ii) Sei $h \subset \mathbb{R}^2$ eine weitere Gerade, die parallel zu g verläuft. Zeige, daß $\sigma_g(h)$ ebenfalls parallel zu g verläuft.

Lösung. **(i)** Für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gilt $\sigma_g(P) = P$ genau dann, wenn $P \in g$ ist.

(ii) Zwei Geraden sind parallel, wenn sie identisch sind, oder verschieden und sich nicht schneiden. Ist $h = g$, so wissen wir aus (i), daß $\sigma_g(h) = \sigma_g(g) = g$, und die Behauptung folgt trivialerweise.
Wir betrachten also den Fall, daß $h \neq g$. Nehmen wir an, daß $\sigma_g(h)$ nicht parallel zu g verläuft. Dann haben $\sigma_g(h)$ und g nach Definition genau einen Schnittpunkt P. Da $P \in g$ folgt aus (i), daß $\sigma_g(P) = P$. Wenn wir $\sigma_g(h)$ also wieder zurückspiegeln, sehen wir, dass P ein Schnittpunkt von g und h ist. Also waren g und h nicht parallel.

Aufgabe 4.14. Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$.

(i) Sei g gegeben durch $g = \{P + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
Was ist der Vektor einer Geraden, die senkrecht auf g steht?

(ii) Wir betrachten die Gerade

$$g := \{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Was ist die Spiegelung von $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an g?

Lösung. **(i)** Aus der Schule (oder der Vorlesung „Lineare Algebra“) wissen wir, daß zwei Vektoren v, w eines Vektorraums V mit Skalarprodukt orthogonal zueinander sind, wenn ihr Skalarprodukt $= 0$ ist. Für einen endlich dimensionalen reellen Vektorraum ist das gleichbedeutend damit, senkrecht aufeinander zu stehen. Mit dem üblichen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ sieht man leicht, daß für $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$v \cdot w = 0$$

für jedes Vielfach w von $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

(ii) Aus (i) folgt, daß die Gerade h, durch P, die auf g senkrecht steht gegeben ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Schnittpunkt Q von g und h ist gegeben durch folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 + \lambda \cdot 1 \\ 3 + \lambda \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \mu \cdot (-1) \\ 2 + \mu \cdot 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = -3 - \mu \\ 3 + \lambda = 2 + \mu \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mu = -1 \text{ und } \lambda = -2$$

Wir erhalten nun $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Spiegelbild $\sigma_g(P)$ von P an g ist jetzt gegeben durch

$$\sigma_g(P) = Q + (Q - P) = P + 2(Q - P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.15. Sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt.

(i) Gib eine (geometrische) Definition der Punktspiegelung σ_P an P an.

(ii) Kann man eine Punktspiegelung mit Hilfe von Spiegelungen, Drehungen, Translationen beschreiben?

(iii) Zeige: Für jede Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ ist $\sigma_P(g)$ parallel zu g.

Lösung. **(i)** Die Punktspiegelung σ_P ist die eindeutige Bewegung für die gilt:

- $\sigma_P(P) = P$.
- Für $X \neq P$ ist $X - P - \sigma_P(X)$.

Geometrischer können wir auch definieren: Für $X \in \mathbb{R}^2$ ist $\sigma_P(X)$ gegeben durch

$$\sigma_P(X) = P + (P - X) = X + 2 \cdot (P - X) = 2P - X.$$

Diese Definition funktioniert auch für P, denn für $X = P$ gilt $\sigma_P(X) = P - 0 = p$. Für $X \neq P$ liegen $X, P, \sigma_P(X)$ auf der Geraden $\{P + \lambda \cdot (P - X) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und P liegt zwischen X und $\sigma_P(X)$. Es ist anschaulich klar, daß der Abstand zwischen P und X gleich dem Abstand zwischen P und $\sigma_P(X)$ ist, aber den Abstand haben wir noch nicht definiert.

(ii) Ja, die Punktspiegelung kann gesehen werden als die Drehung um 180° (oder π oder um zwei rechte Winkel).

(iii) Nach Definition ist klar, daß σ_P jede Gerade durch P auf sich selbst abbildet, und identische Geraden sind parallel.
Sei also $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit $P \notin g$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $\sigma_P(g) \cap g \neq \varnothing$. (Es ist unmöglich, daß $\sigma_P(g) = g$, denn sonst für jedes $X \in g$ hätte man $X - P - \sigma_P(X)$, und da $\sigma_P(X) \in \sigma_P(g) = g$ wäre also auch $P \in g$.) Sei also $M = \sigma_P(g) \cap g$ der eindeutige Schnittpunkt. Da $\sigma_P = \sigma_P^{-1}$ ist dann auch

$$\sigma_P(M) \in \sigma_P^2(g) \cap \sigma_P(g) = g \cap \sigma_P(g)$$

ein Schnittpunkt. Es folgt $\sigma_P(M) = M$. Also ist M ein Fixpunkt, und es folgt $M = P$, Widerspruch.

Aufgabe 4.16. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt. Zeige, daß für jede Verschiebung $\tau \in \mathcal{B}$ gilt $\operatorname{Fix}(\tau) = \varnothing$.

Lösung. Sei $\tau \in \mathcal{B}$ eine Verschiebung längs der Geraden g. Wähle einen beliebigen Punkt $X \in \mathcal{E}$. Wir betrachten zwei Fälle:
1. Fall: Ist $X \in g$, so wählt man einen zweiten Punkt $Y \in \mathcal{E} \backslash g$.
2. Fall: Ist $X \in \mathcal{E} \backslash g$, so wählt man einen zweiten Punkt $Y \in g$.
Betrachte nun die Gerade $g(X, Y)$. In beiden Fällen haben g und $g(X, Y)$ genau einen Schnittpunkt (entweder X oder Y). Also ist $g(X, Y)$ nicht parallel zu g, und nach Voraussetzung folgt, daß $g(X, Y) \cap \tau(g(X, Y)) = \varnothing$. Also hat $g(X, Y)$ keinen Fixpunkt von τ, speziell its X kein Fixpunkt von τ.

Aufgabe 4.17. Sei $\mathcal{E}$ eine Ebene, die die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt. Zeige, daß für jede Verschiebung $\tau \in \mathcal{B}$ gilt $X - \tau(X) - \tau^2(X)$ für alle $X \in \mathcal{E}$.

Lösung. Da τ eine Verschiebung ist, gibt es eine Gerade $g \subset \mathcal{E}$ mit $\tau(g) = g$. Ist nun $X \in g$, so ist natürlich auch $\tau(X), \tau^2(X) \in g$. Weiterhin wissen wir, daß τ als Bewegung Strahlen auf Strahlen und Strecken auf Strecken abbildet. Würde aber $X - \tau^2(X) - \tau(X)$ oder $\tau^2(X) - X - \tau(X)$ gelten, so hätte τ einen Fixpunkt. Also gilt $X - \tau(X) - \tau^2(X)$.
Ist andererseits $X \notin g$, so haben die Geraden $g(X, \tau(X))$ und $\tau(g(X, \tau(X))) = g(\tau(X), \tau^2(X))$ mindestens einen gemeinsamen Punkt, nämlich $\tau(X)$. Es folgt aus der Definition von Verschiebungen, daß $g(X, \tau(X))$ parallel zu g sein muß. Wir können das Argument für $Y = \tau(X)$ wiederholen, und erhalten somit, daß auch $g(\tau(X), \tau^2(X))$ parallel zu g ist. Es folgt, daß $g(X, \tau(X)) = g(\tau(X), \tau^2(X))$. Also liegen die drei Punkte $X, \tau(X), \tau^2(X)$ auf einer Geraden, die von τ erhalten bleibt. Wir können nun einfach das Argument von oben wiederholen.

Aufgabe 4.18. Seien $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^2$.

(i) Gib eine Verschiebung, eine Drehung und eine Spiegelung an, die P in Q überführen.

(ii) Welche von diesen drei Bewegungen sind eindeutig?

(iii) Wie könnte man die drei Bewegungen für beliebige Punkte $P \neq Q$ in $\mathbb{R}^2$ beschreiben?

Lösung. **(i)** Die Verschiebung um den Vektor $Q - P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\tau_{Q-P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X \mapsto X + (Q - P)$$

bildet P auf Q ab.
Die Drehung um den Punkt $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ um den Winkel $\sphericalangle_{POQ}$

$$\rho_{\sphericalangle_{POQ}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

bildet P auf Q ab. Aber auch die Drehung um jeden anderen Punkt $M = \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, auf der Diagonalen um den Winkel $\sphericalangle_{PAQ}$. Für $m = \frac{1}{2}$, also $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ können wir die Abbildung explizit beschreiben als

$$\sigma_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X \mapsto X + 2 \cdot (M - X) = 2M - X.$$

Die Spiegelung an der Diagonalen

$$d = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

bildet P auf Q ab.

(ii) Die Verschiebung und die Spiegelung sind eindeutig. Die Drehung ist, wie wir gesehen haben, nicht eindeutig.

(iii) Die Verschiebung haben wir bereits in der allgemeinsten Form angegeben:

$$\tau_{Q-P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X \mapsto X + (Q - P).$$

Für die Drehungen ist es relativ einfach, die Drehung um π um den Mittelpunkt M von $\overline{PQ}$ zu beschreiben. Dieser ist gegeben durch $M = P + (Q - P) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(Q + P)$. Damit ist

$$\sigma_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X \mapsto X + 2 \cdot (M - X) = Q + P - X.$$

Für die Spiegelung, ist diese die Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{PQ}$. Diese ist nicht so einfach explizit zu beschreiben.

Aufgabe 4.19. Wir betrachten Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen in $\mathbb{R}^2$. Die Verknüpfung von zwei Verschiebungen ist natürlich wiederum eine Verschiebung.

(i) Ist die Verknüpfung von zwei Drehungen wieder eine Drehung? Die Drehungen können dabei um zwei verschiedenen Punkte erfolgen.
(Kein Beweis erforderlich, wir schauen uns das später nochmal genauer an.)

(ii) Was kann man über die Verknüpfung von zwei Spiegelungen entlang von zwei Geraden g und h sagen? Ist dies wiederum eine Spiegelung? Oder eine andere Art von Bewegung?
Hinweis: *Betrachte drei Fälle: g und h schneiden sich, g und h sind parallel und verschieden, g und h sind identisch.*

Lösung. **(i)** Die Verknüpfung einer Drehung um den Punkt P mit Drehwinkel α und einer Drehung um den Punkt Q mit Drehwinkel β ist eine Drehung um einen (anderen) Punkt mit Drehwinkel $\alpha + \beta$. Außer, wenn beide Winkel π (oder 180°) sind, dann handelt es sich um eine Verschiebung.

(ii) Es seien g und h zwei Geraden. Wir unterscheiden drei Fälle:

- Wenn sich g und h in genau einem Punkt P schneiden, dann ist die Verknüpfung der zwei Spiegelungen $\sigma_g \circ \sigma_h$ eine Drehung um den Punkt P.
- Wenn sich g und h nicht schneiden und verschieden sind, dann ist die Verknüpfung der zwei Spiegelungen $\sigma_g \circ \sigma_h$ eine Verschiebung.
- Wenn g und h identisch sind, so ist $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_g^2 = \mathrm{id}$.

Aufgabe 4.20. Es sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, σ_g die dadurch induzierte Spiegelung und ρ eine Drehung um einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$. Genau wann ist die Verknüpfung $\sigma_g \circ \rho$ wieder eine Spiegelung? *(Kein Beweis erforderlich.)*

Lösung. Es handelt sich um eine Spiegelung genau dann, wenn $P \in g$.
Man überlegt sich das folgendermaßen: Sei α der Drehwinkel. Dann ist die neue Spiegelgerade die Gerade, die g in P schneidet und mit ihr einen Winkel von $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.

Aufgabe 4.21. Sei $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung in $\mathbb{R}^2$ und $\rho \neq \mathrm{id}$ eine Drehung. Zeige, daß dann gilt $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.
Hinweis: *Man kann benutzen, daß Verschiebungen keine Fixpunkte und Drehungen genau einen Fixpunkt haben.*

Lösung. Sei P der eindeutige Fixpunkt von ρ. Wäre $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$, dann wäre insbesondere

$$\tau(P) = \tau(\rho(P)) = \rho(\tau(P)),$$

also $\tau(P)$ ein Fixpunkt von ρ. Der einzige Fixpunkt von ρ ist aber P. Also müsste $\tau(P) = P$ gelten. Die Verschiebung τ hat aber keinen Fixpunkt. Also ist $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.

Aufgabe 4.22. Was sind die Fixpunktmengen einer Spiegelung, einer Drehung, einer Verschiebung und der Identität?

Lösung. Eine Spiegelung σ_g ist eine Bewegung, die eine Gerade g punktweise festläßt und die Punkte, die sich nicht auf der Geraden befinden, auf die jeweils andere Seite der Gerade abbildet. Also ist die Fixpunktmenge gegeben durch $\mathrm{Fix}\,(\sigma_g) = g$.
Eine Drehung ist ρ_P ist eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt, dem Punkt P, um die die Drehung stattfindet. Also ist die Fixpunktmenge gegeben durch $\mathrm{Fix}\,(\rho_P) = \{P\}$.
Eine Verschiebung τ hat keine Fixpunkte, also ist $\mathrm{Fix}\,(\tau) = \varnothing$.

Aufgabe 4.23. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$. Für welche n ist ein n-Eck schon durch die Exkpunkte festgelegt? Überlege, warum das so ist, beziehungsweise gib ein Gegenbeispiel, wenn es nicht so ist.

Lösung. Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sich ihre Ecken so mit A, B, C beziehungsweise A', B', C' bezeichnen laßen, daß es eine Bewegung φ gibt, mit

$$\varphi(A) = A', \qquad \varphi(B) = B', \qquad \varphi(C) = C'.$$

Dies folgt direkt aus dem Beweise von Satz 4.75. Das bedeutet, daß ein 3-Eck schon durch die Eckpunte festgelegt ist.
Dies ist nicht der Fall bei 4-Ecken oder n-Ecken mit $n \geqslant 4$. Man kann leicht konvexe 4-Ecke skizieren, die die gleichen Eckpunte haben, aber nicht kongruent sind.

Aufgabe 4.24. Es seine $P \neq Q \in \mathbb{R}^2$. Beschreibe die folgenden Objekte:

(i) der Richtungsvektor von P nach Q;

(ii) die Gerade, die durch P, Q definiert ist;

(iii) der Strahl, der in P beginnt und durch Q läuft;

(iv) der Strahl, der in Q beginnt und durch P läuft;

(v) die Strecke zwischen P und Q;

(vi) die Länge der Strecke zwischen P und Q.

Lösung. Der Richtungsvektor von P nach Q ist gegeben durch die Differenz

$$Q - P.$$

Der Richtungsvektor von Q nach P ist gegeben durch die Differenz

$$P - Q.$$

Die Gerade, die durch P und Q definiert ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g(P, Q) =& \{P + \lambda \cdot (Q - P) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{Q + \lambda \cdot (P - Q) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{P + \lambda \cdot (P - Q) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{Q + \lambda \cdot (Q - P) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Der Strahl, der in P beginnt und durch Q läuft, ist gegeben durch

$$\overrightarrow{PQ} = \{P + \lambda \cdot (Q - P) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}.$$

Der Strahl, der in Q beginnt und durch P läuft, ist gegeben durch

$$\overrightarrow{QP}\{Q + \lambda \cdot (P - Q) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}.$$

Die Strecke zwischen P und Q ist gegeben durch

$$\overline{PQ} = \{P + \lambda \cdot (Q - P) \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{Q + \lambda \cdot (P - Q) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Der letzte Teil greift eine Definition vor, die wir erst im nächsten Kaitel offiziell einführen, die jedoch aus der Schule bekannt sein sollte. Sei $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Dann ist die Länge der Strecke zwischen P und Q gegeben durch

$$\ell(\overline{PQ}) = \|P - Q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}.$$

Aufgabe 4.25. Seien nun $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne die Objekte der vorherigen Aufgabe in diesem konkreten Fall.

Lösung.

$$\begin{aligned}
Q - P &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
P - Q &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
g(P,Q) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
\overrightarrow{PQ} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \right\} \\
\overrightarrow{QP} &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \right\} \\
\overline{PQ} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in [0,1] \right\} \\
\ell(\overline{PQ}) &= \sqrt{(1-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}
\end{aligned}$$

6.5 Lösungen der Aufgaben in §5

Aufgabe 5.1. Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Es ist

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

genau dann, wenn ....

Lösung. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen und außerdem B zwischen A und C liegt. Wenn A, B, C paarweise verschieden sind, bedeutet das in der Notation des vorherigen Kapitels $A - B - C$. Wenn zwei der drei Punkte zusammenfallen, also entweder $A = B$ oder $B = C$, so ist eine der Längen auf der rechten Seite der Gleichung 0, und die beiden anderen sind gleich. Fallen alle drei Punkte zusammen, so ist die Aussage trivial.

Aufgabe 5.2. Es seien A, B, C drei kollineare Punkte, so daß B zwischen A und C liegt. Zeige, daß

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

gilt.
Hinweis: *Verwende die Beschreibung der Gerade mithilfe des Aufpunktes A.*

Lösung. Sei g die Gerade auf der die drei Punkte A, B, C liegen. (Falls $A = B = C$ ist, so gibt es unendlich viele dieser Geraden, falls mindestens zwei der Punkte verschieden sind, so ist die Gerade eindeutig.) Wir könne diese schreiben als

$$g = \{A + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir können dabei den Richtungsvektor v so wählen, daß $C = A + \lambda_C \cdot v$ mit einer Konstanten $\lambda_C \geqslant 0$. Da B zwischen A und C liegt, gilt $B = A + \lambda_B \cdot v$ mit einer Konstanten $0 \leqslant \lambda_B \leqslant \lambda_C$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
\ell(\overline{AC}) &= \|C - A\| \\
&= \|(A + \lambda_C \cdot v) - A\| \\
&= \|\lambda_C \cdot v\| \\
&= \lambda_C \cdot \|v\| \\
&= (\lambda_C - \lambda_B) \cdot \|v\| + \lambda_B \cdot \|v\| \\
&= \|(\lambda_C - \lambda_B) \cdot v\| + \|\lambda_B \cdot v\| \\
&= \|(A + \lambda_C \cdot v) - (A + \lambda_B \cdot v)\| + \|(A + \lambda_B \cdot v) - A\| \\
&= \|C - B\| + \|B - A\| = \ell(\overline{BC}) + \ell(\overline{AB}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.3. Zeige, daß für $A, B \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$A \neq B \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell(\overline{AB}) > 0.$$

Lösung. Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $B - A = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ Sei zuerst $A \neq B$, also $B - A \neq 0$, also $b_1 - a_1 \neq 0$ oder $b_2 - a_2 \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\ell(\overline{AB}) &= \|B - A\| \\
&= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} > 0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Richtung „$\Rightarrow$“.
Sei nun $A = B$, dann ist $B - A = 0$ und damit auch

$$\begin{aligned}
\ell(\overline{AB}) &= \|0| \\
&= \sqrt{0^2 + 0^2} = 0.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Richtung „$\Leftarrow$“.

Aufgabe 5.4. Es seien P und Q zwei Punkte auf einem Strahl $\overrightarrow{AB}$. Zeige: Wenn $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ})$, dann gilt $P = Q$.
Hinweis: *Verwende eine explizite Beschreibung des Strahls.*

Lösung. Wir können den Strahl $\overrightarrow{AB}$ schreiben als

$$\overrightarrow{AB} = \{A + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}$$

mit $v = B - A$. Es ist $\|v\| = \ell(\overline{AB}) \neq 0$, denn $B \neq A$, also $v \neq 0$. Da P und Q auf $\overrightarrow{AB}$ liegen, gibt es $\lambda_P, \lambda_Q \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit

$$P = A + \lambda_P \cdot v \qquad\qquad Q = A + \lambda_Q \cdot v$$

Wir berechnen nun $\ell(\overline{AP})$ und $\ell(\overline{AQ})$:

$$\begin{aligned}
\ell(\overline{AP}) &= \|P - A\| \\
&= \|(A + \lambda_P \cdot v) - A| \\
&= \|\lambda_P \cdot v\| = \lambda_P \cdot \|v\| \\
\ell(\overline{AQ}) &= \|Q - A\| \\
&= \|(A + \lambda_Q \cdot v) - A| \\
&= \|\lambda_Q \cdot v\| = \lambda_Q \cdot \|v\|
\end{aligned}$$

Da $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ})$ folgt also

$$\lambda_P \cdot \|v\| = \lambda_Q \cdot \|v\|.$$

Teilen wir das durch $\|v\|$, folgt $\lambda_P = \lambda_Q$, und damit

$$P = A + \lambda_P \cdot v = A + \lambda_Q \cdot v = Q.$$

Aufgabe 5.5. Wie könnte man die Länge eines Kreises definieren?

Lösung. Es gibt hier viele Möglichkeiten, also nicht „eine“ korekte Antwort. Eine Möglichkeit wäre, Punkte auf dem Kreis zunehmen, die Länge des Streckenzuges zu bestimmen, und dann den „Grenzwert“ der Längen mit immer mehr Punkten zu bilden.

Aufgabe 5.6. Seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit Schnittpunkt P. Zeige, daß deren Scheitelwinkel gleich groß sind.
Hinweis: *Mache Dir den Sachverhalt an einem Bild klar. Man kann zum Beispiel Satz 5.17 (ii) verwenden.*

Lösung. Wir bezeichnen die vier Winkel, die am Schnittpunkt auftreten, gegen den Uhrzeigersinn mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, das heißt α und γ sind ein Scheitelwinkelpaar, und β und δ. Des weiteren sind α und β Nebenwinkel, sowie β und γ (aber auch γ und δ sowie δ und α). Das bedeutet, daß

$$\alpha + \beta = \pi = \beta + \gamma,$$
$$\beta + \gamma = \pi = \gamma + \delta.$$

Ziehen wir in der ersten Gleichung β ab, und in der zweiten Gleichung γ, so erhalten wir $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

Aufgabe 5.7. Wir haben gesehen, daß jede längenerhaltende Abbildung auch winkelerhaltend ist. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

Lösung. Nein. Ein Gegenbeispiel wäre eine Streckung um einen Faktor $\lambda \neq 1$. Diese ist sicherlich winkelerhaltend, aber nicht längenerhaltend.

Aufgabe 5.8. Seien $g_1 \neq g_2$ parallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ und h eine weitere Gerade, welche g_1 und g_2 schneidet. Zeige, daß die Winkelmaße von zwei Ergänzungswinkel zusammen π ergeben.
Hinweis: *Man kann sich am Beweis von Satz 5.23 (i) und (ii) orientieren.*

Lösung. Sei P_1 der Schnittpunkt von g_1 und h und P_2 der Schnittpunkt von g_2 und h. Wir bezeichnen mit $v = P_2 - P_1$ den Richtungsvektor von P_1 nach P_2. Sei $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die eindeutige Verschiebung die P_1 auf P_2 abbildet.
Wir zeigen zuerst, daß $\tau_v(g_1) = g_2$:
Wir wissen, daß $\tau_v(g_1)$ parallel zu g_1 verläuft. Da $\tau_v(P_1) = P_2$ ist, verläuft $\tau_v(g_1)$ durch P_2. Auch g_2 ist eine zu g_1 parallele Gerade, die durch P_2 verläuft. Es folgt $\tau_v(g_1) = g_2$.
Wir zeigen nun, daß $\tau_v(h) = h$:
Wir wissen, daß $\tau_v(h)$ parallel zu h verläuft. Da $P_1, P_2 \in h$ und $\tau_v(P_1) = P_2$, sehen wir, daß h und $\tau_v(h)$ beide den Punkt $\tau_v(P_1) = P_2$ enthalten. Zwei parallel Geraden, die durch den gleichen Punkt verlaufen, sind identisch, also $\tau_v(h) = h$.
Es folgt nun also, daß τ_v den Ergänzungswinkel bei P_1 in den Nebenwinkel des Ergänzungswinkels bei P_2 überführt. Aus Satz 5.21 (i) folgt, daß diese sich zu π ergänzen.

Aufgabe 5.9. Sei ein Kreis $\mathcal{K}(P,r)$ vom Radius $r>0$ gegeben. Zeige, daß der Durchmesser von $\mathcal{K}(P,r)$ gegeben ist durch $2r$.

Lösung. Der Beweise kann in zwei Teile aufgeteilt werden:

(i) Wir müssen zeigen, daß es zwei Punkte auf $\mathcal{K}(P,r)$ gibt, deren Abstand $2r$ beträgt, und

(ii) wir müssen zeigen, dass für beliebige Punkte S und T auf $\mathcal{K}(P,r)$ gilt, dass der Abstand höchstens $2r$ beträgt.

Suchen wir also zuerst zwei Punkte auf $\mathcal{K}(P,r)$, die den Abstand $2r$ haben. Anschaulich können wir diese finden, indem wir eine Gerade durch den Pittelpunkt P legen, und die beiden gegenüberliegenden Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis nehmen. Besonders einfach werden unsere Rechnungen, wenn wir eine horizontale oder vertikale Gerade nehmen. Wir schreiben also $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und betrachten die Punkte

$$S=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1-r \\ p_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1+r \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Dann rechnet man leicht nach

$$\begin{aligned} \ell(\overline{PS}) &= \|S-P\| \\ &= \sqrt{(-r)^2+0^2}=r \\ \ell(\overline{PT}) &= \|T-P\| \\ &= \sqrt{r^2+0^2}=r \\ \ell(\overline{ST}) &= \|T-S\| \\ &= \sqrt{(2r)^2+0^2}=2r \end{aligned}$$

Wir haben also zwei Punkte auf $\mathcal{K}(P,r)$ gefunden, die den Abstand $2r$ haben.
Seien $S,T\in\mathcal{K}(P,r)$ nun zwei beliebige Punkte. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\ell(\overline{ST})\leqslant \ell(\overline{SP})+\ell(\overline{PT})=r+r=2r,$$

wo wir benutzt haben, daß für alle Punkte auf $\mathcal{K}(P,r)$ der Abstand zu P genau r ist.

Aufgabe 5.10. Sei $X\subset\mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $\operatorname{diam}(X)=d$. Ist X dann notwendigerweise in einer Kreisscheibe $\mathcal{S}(P,\frac{d}{2})$ vom Radius $\frac{d}{2}$ enthalten?

Lösung. Nein. Ein Gegenbeispiel ist ein gleichseitiges Dreieck $D(d)$ mit Seitenlänge d. Dieses hat natürlich $\operatorname{diam}(D(d))=d$. Aber es gibt keine Kreisscheibe vom Radius $\frac{d}{2}$, die das Dreieck enthält.

Aufgabe 5.11. Seien $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $Q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ Punkte und $r>0$. Zeige:

(i) $Q\in\mathcal{K}(P,r)\iff(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2=r^2$.

(ii) $Q\in\mathcal{S}(P,r)\iff(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2\leqslant r^2$.

Lösung. Dies folgt sofort aus den Definitionen:

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{K}(P,r) &\Leftrightarrow \ell(\overline{PQ}) = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 = r^2. \\ Q \in \mathcal{S}(P,r) &\Leftrightarrow \ell(\overline{PQ}) \leqslant r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2} \leqslant r \\ &\Leftrightarrow (q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 \leqslant r^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.12. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$. Zeige:
Ist $r < \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$, so schneiden sich die beiden Kreise $\mathcal{K}(A,r)$ und $\mathcal{K}(B,r)$ nicht.

Lösung. Wenn es einen Schnittpunkt $Q \in \mathcal{K}(A,r) \cap \mathcal{K}(B,r)$ gäbe, dann wäre

$$\begin{aligned} 2r &< \ell(\overline{AB}) && \text{(Voraussetzung)} \\ &< \ell(\overline{AQ}) + \ell(\overline{QB}) && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &= r + r && \text{(Voraussetzung)} \\ &= 2r \end{aligned}$$

Ein Widerspruch, da $r > 0$.

Aufgabe 5.13. Sei $g = \{A + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Aufpunkt $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Beschreibe einen beliebigen Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g$ mit Hilfe einer Gleichung der Form $y = f(x)$ oder $x = f(y)$.

Lösung. Ein Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in g$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y &= a_2 + \lambda \cdot v_2 \end{aligned}$$

für ein geeignetes λ. Da v ein Richtungsvektor ist, ist $v \neq 0$. Also ist entweder v_1 oder v_2 ungleich 0 (oder beide).
Wir betrachten zuerst den Fall, daß $v_1 = 0$, also $v_2 \neq 0$. Dann ist $x = a_1$ konstant und $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Also ist

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = a_1, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sei als nächstes $v_1 \neq 0$ (und es spielt keine Rolle, was v_2 ist. Wir wollen y in Abhängigkeit von x darstellen. Dies gelingt, wenn wir x nach λ auflösen:

$$\lambda = \frac{x - a_1}{v_1}$$

und dann in y einsetzen:

$$y = a_2 + \frac{x - a_1}{v_1} \cdot v_2 = (a_2 - \frac{a_1 v_2}{v_1}) + \frac{v_2}{v_2} \cdot x.$$

Also ist

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (a_2 - \frac{a_1 v_2}{v_1}) + \frac{v_2}{v_2} \cdot x \right\}.$$

Aufgabe 5.14. Sei $\mathcal{K}(P,r)$ ein Kreis mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Zeige, daß genau eine der folgenden Aussagen gilt:

(i) Der Kreis $\mathcal{K}(P,r)$ und die Gerade g schneiden sich nicht.

(ii) Der Kreis $\mathcal{K}(P,r)$ und die Gerade g schneiden sich in genau einem Punkt Q.

(iii) Der Kreis $\mathcal{K}(P,r)$ und die Gerade g schneiden sich in zwei Punkten $U \neq V$.

Lösung. Da jede Bewegung einen Kreis in eine Kreis vom selben Radius, und eine gerade in eine Gerade überführt, können wir eine beliebige Bewegung anwenden, um di Situation so einfach wie möglich zu machen.
Wir wenden zuerst die Verschiebung $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Richtungsvektor $v = 0 - P$ an, die P auf den Ursprung sendet. Dann ist

$$\tau_v(\mathcal{K}(P,r) = \mathcal{K}(0,r) \qquad \text{und} \qquad \tau_v(g) \| g.$$

Dann wenden wir eine Drehung $\rho_{P,\alpha}$ um den Ursprung an, die g in eine Gerade parallel zur y-Achse überführt. Da deren Fixpunkt P ist, bildet sie $\mathcal{K}(0,r)$ auf sich selbst ab. Dann ist

$$\rho_{P,\alpha} \circ \tau_v(\mathcal{K}(P,r) = \mathcal{K}(0,r) \qquad \text{und} \qquad \rho_{P,\alpha} \circ \tau_v(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x = a, y \in \mathbb{R} \right\}$$

für eine geeignete Konstante $a \in \mathbb{R}$.
Es genügt also die Aussage für $\mathcal{K}(0,r)$ und $g = \{x = a\}$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(0,r) \cap g &\iff \begin{cases} x = a \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ y^2 = r^2 - a^2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

$|a| < r$: Dann ist $r^2 - a^2 > 0$ und $y = \pm\sqrt{r^2 - a^2}$. Somit haben wir zwei verschiedene Schnittpunkte

$$U = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{r^2 - a^2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{r^2 - a^2} \end{pmatrix}.$$

$|a| = r$: Dann ist $r^2 - a^2 = 0$ und $y = 0$ und wir erhalten genau einen Schnittpunkt

$$Q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$|a| > r$: Dann ist $r^2 - a^2 < 0$ und es gibt keine reelle Zahl y, die erfüllt $y^2 = r^2 - a^2$. Somit gibt es keinen Schnittpunkt.

Aufgabe 5.15. Sei $\mathcal{K}(P,r)$ ein Kreis und $Q \neq \mathcal{S}(P,r)$.

(i) Wieviele Tangenten zu $\mathcal{K}(P,r)$ durch Q gibt es?

(ii) Wieviele Sekanten zu $\mathcal{K}(P,r)$ durch Q gibt es?

(iii) Wieviele Passanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(iv) Wieviele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q und durch P gibt es?

Wie verhält es sich für $Q \in \mathcal{S}(P, r)$?

Lösung. Ist Q außerhalb der Kreisscheibe $\mathcal{S}(P, r)$, so gibt es

- zwei Tangenten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- unendlich viele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- unendlich viele Passanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- eine Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q und durch P.

Ist $Q \in \mathcal{K}(P, r)$, so gibt es

- eine Tangente zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- unendlich viele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- keine Passante zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- eine Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q und durch P.

Ist Q im Inneren der Kreisscheibe $\mathcal{S}(P, r)$, so gibt es

- keine Tangente zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- unendlich viele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- keine Passante zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q,
- eine (falls $P \neq Q$) oder unendlich viele (falls $P = Q$) Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q und durch P.

Aufgabe 5.16. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ Punkte.

(i) Gib eine Definition für den Mittelpunkt P der Strecke $\overline{AB}$ an.

(ii) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$. Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes P von $\overline{AB}$.

(iii) Versuche daraus eine Formel für die Koordinaten des Mittelpunktes P in Abhängigkeit der Koordinaten von A und B herzuleiten.

Lösung. Der Mittelpunkt P einer Strecke $\overline{AB}$ ist ein Punkt, der von A und B den gleichen Abstand hat, also $\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{PB})$. Es gibt jedoch viele Punkte, die dieses Kriterium erfüllen, nämlich alle Punkte auf der Mittelsenkrechten. Für den Mittelpunkt muß zusätzlich gelten $P \in \overline{AB}$.

Der Mittelpunkt P von $\overline{AB}$ liegt also auf halber Strecke zwischen A und B auf der Geraden $g(A, B) = \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Er berechnet sich also durch

$$P = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{A + B}{2}.$$

Ist $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ erhalten wir also für die Koordinaten von P:

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$
$$p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Für $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ erhalten wir also

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+11}{2} \\ \frac{2+8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.17. Sei $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Zeige, daß gilt

$$\angle_{BAC} = \angle_{ABC} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}).$$

Hinweis: *In der Vorlesung haben wir bereits die umgekehrte Richtung bewiesen.*

Lösung. Wir bezeichnen mit D den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und es sei h das Lot auf D. Wir bezeichnen mit P den Schnittpunkt von h mit dem Strahl $\overrightarrow{AC}$ und wir bezeichnen mit Q den Schnittpunkt mit dem Strahl $\overrightarrow{BC}$. Wir betrachten nun die Dreiecke $\triangle_{ADP}$ und $\triangle_{BDQ}$. Es folgt aus dem WSW-Satz 5.41, daß diese Dreiecke kongruent sind. Insbesondere ist $\overline{DP} = \overline{DQ}$. Dann folgt jedoch, daß $P = Q$, und dieser Punkt liegt sowohl auf $\overrightarrow{AC}$ und auf $\overrightarrow{BC}$. Da diese beiden Strahlen jedoch genau einen Schnittpunkt, nämlich C haben, folgt $P = Q = C$. Es ist also $\triangle_{ADP} = \triangle_{ADC}$ und $\triangle_{BDQ} = \triangle_{BDC}$, und diese sind kongruent. Das impliziert, daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$.

Aufgabe 5.18. Sei $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit $\angle_{BAC} = \angle_{ABC}$. Zeige, daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$ ohne im Beweise einen Hilfspunkt einzuführen.

Lösung. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{ABC}$ und $\triangle_{BAC}$. Nach Voraussetzung sind die Innenwinkel am ersten und zweiten Eckpunkt jeweils gleich. Nachdem die Strecke vom ersten zum zweiten Eckpunkt gleich (also auch gleichlang) sind, folgt aus dem WSW-Satz 5.41, daß die Dreiecke kongruent sind. Also sind auch die Strecken vom jeweils ersten zum dritten Eckpunkt gleich lang.

Aufgabe 5.19. Wir wollen Kongruenzsätze für Vierecke untersuchen.

(i) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSSS? D.h. wenn für gegebene Vierecke $\square_{ABCD}$ und $\square_{A'B'C'D'}$ alle entsprechenden Seiten gleich lang sind und ein Innenwinkel gleich groß ist, folgt daraus schon, dass die Vierecke kongruent sind?

(ii) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSWS?

(iii) Was für Kongruenzsätze kennst Du für Vierecke? Kannst Du selber welche finden?

Lösung. Man findet leicht ein Gegenbeispiel zu **(i)**.
Die Aussage **(ii)** gilt. Durch den SWS-Satz 5.40 sind die ersten drei Eckpunkte schon festgelegt. Der vierte Eckpunkt schlägt einen festgelegten Winkel zur dritten Seite ein. Dadurch, dass ein Viereck vorliegt, ist die Drehrichtung des Winkels eindeutig festgelegt. Durch Winkel, Drehrichtung und Abstand zum 3. Eckpunkt ist der 4. Eckpunkt eindeutig festgelegt.
Bezüglich **(iii)** gilt zum Beispiel ein WSWSW-Satz aber kein WSWWW-Satz.

Aufgabe 5.20. Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier Punkte, so daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BD})$ und, so daß der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ mit dem Mittelpunkt von $\overline{BD}$ übereinstimmt. Zeige, daß A, B, C, D die Eckpunkte eines Rechtecks sind.

Lösung. Wir werden verwenden, daß die Innenwinkelsumme im Dreieck π beträgt. Bezeichne mit P den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(B, D)$, der zugleich der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ ist. Es folgt, daß

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{BP}) = \ell(\overline{CP}) = \ell(\overline{DP}).$$

Insbesondere sind die Dreiecke $\triangle_{ABP}$, $\triangle_{BCP}$, $\triangle_{CDP}$ und $\triangle_{CAP}$ gleichschenklig und damit gleichwinklig. Also:

$$\begin{aligned}
\angle_{BAP} &= \angle_{PBA}\\
\angle_{CBP} &= \angle_{PCB}\\
\angle_{DCP} &= \angle_{PDC}\\
\angle_{ADP} &= \angle_{PAD}
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \angle_{BAD} = \angle_{BAP} + \angle_{PAD},\\
\beta &= \angle_{CBA} = \angle_{CBP} + \angle_{PBA},\\
\gamma &= \angle_{DCB} = \angle_{DCP} + \angle_{PCB},\\
\delta &= \angle_{ADC}) = \angle_{ADP} + \angle_{PDC}.
\end{aligned}$$

Da die Inneninkelsumme im Dreieck π beträgt, gilt

$$\begin{aligned}
\pi &= \angle_{BAP} + \angle_{APB} + \angle_{PBA}\\
\pi &= \angle_{CBP} + \angle_{BPC} + \angle_{PCB}\\
\pi &= \angle_{DCP} + \angle_{CPD} + \angle_{PDC}\\
\pi &= \angle_{ADP} + \angle_{DPA} + \angle_{PAD}
\end{aligned}$$

Da Nebenwinkel π ergeben außerdem

$$\begin{aligned}
\pi &= \angle_{APB} + \angle_{BPC}\\
\pi &= \angle_{BPC} + \angle_{CPD}\\
\pi &= \angle_{CPD} + \angle_{DPA}\\
\pi &= \angle_{DPA} + \angle_{APB}
\end{aligned}$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2\pi &= (\angle_{BAP} + \angle_{APB} + \angle_{PBA}) + (\angle_{CBP} + \angle_{BPC} + \angle_{PCB})\\
&= (\angle_{APB} + \angle_{BPC}) + (\angle_{BAP} + \angle_{PBA}) + (\angle_{CBP} + \angle_{PCB})\\
&= \pi + 2 \cdot \angle_{PBA} + 2 \cdot \angle_{CBP}\\
&= \pi + 2\beta
\end{aligned}$$

Also $\beta = \frac{\pi}{2}$. Genauso zeigt man, daß $\alpha = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 5.21. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ und m_{AB} die Mittelsenrechte zu $\overline{AB}$. Zeige

$$\{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\} \subset m_{AB}.$$

Lösung. Sei P der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Sei $Q \in \mathbb{R}^2$ mit $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$. Wir müssen zeigen, daß $Q \in m_{AB}$. Da P in beiden Seiten enthalten ist, können wir annehmen, daß $Q \neq P$. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle_{APQ}$ und $\triangle_{BPQ}$. Diese sind nach dem SSS-Satz 5.42 kongruent. Also sind die Innenwinkel bei P gleich groß, nämlich $\frac{\pi}{2}$. Nach Definition der Mittelsenkrechten folgt, daß $Q \in m_{AB}$.

Aufgabe 5.22. Es sei g eine Gerade und $P \notin g$ ein Punkt.

(i) Fälle mit Zirkel und Lineal das Lot von P auf g.

(ii) Beschreibe in Worten die Konstruktion, welche Du gerade ausgeführt hast.

(iii) Gib eine kurze Begründung, warum diese Konstruktion das Lot von P auf g liefert.

Lösung. Wir führen folgende Konstruktion aus:

(i) Wähle $r > 0$ so groß, daß der Kreis $\mathcal{K}(P, r)$ die Gerade g in zwei Punkten A und B schneidet.

(ii) Sei Q der zweite Schnittpunkt der Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$.

(iii) dann ist die Gerade $g(P, Q)$ das von P auf g gefällte Lot.

Wir bemerken zuerst, die Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$ sich in P schneiden. Da $P \notin g$, folgt aus Satz 5.32, daß es in der Tat einen zweiten Schnittpunkt $Q \neq P$ der beiden Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$ gibt.
Natürlich verläuft die Gerade $g(P, Q)$ durch P. Nun müßen wir noch zeigen, daß $g(P, Q)$ senkrecht auf g steht. Aber in der Konstruktion 5.51 haben wir gesehen, daß $g(P, Q)$ gerade die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist, und deshalb insbesondere senkrecht zu $g = g(A, B)$.

Aufgabe 5.23. Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks immer innerhalb des Dreiecks? Gib eine kurze Begründung für Deine Antwort.

Lösung. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich nach Satz 5.52 in einem Punkt P. Dieser ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, welcher eindeutig ist. Nun finden wir leicht ein Dreieck mit einem Umkreis, dessen Mittelpunkt außerhalb des Dreiecks liegen. Wähle dazu zum Beispiel in einem beliebigen Kreis, in den wir einen Durchmesser d gezeichnet haben, drei Punkte auf der Kreislinie, die alle auf der gleichen Seite dieses Durchmessers liegen.

Aufgabe 5.24. Es seien $P_1, \ldots, P_4$ Punkte in der Ebene, welche ein Viereck bilden. Wir nehmen an, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Genauer gesagt, wir nehmen an, dass folgende Aussagen gelten:

(i) die Seiten $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_3P_4}$ sind gleich lang,

(ii) die Seiten $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_4P_1}$ sind gleich lang.

Folgt daraus schon, dass das Viereck ein Parallelogramm ist?

Lösung. Wir betrachten zunächst die Dreiecke $\triangle_{P_1P_2P_4}$ und $\triangle_{P_3P_4P_2}$, die entstehen, wenn man das Viereck durch die Diagonale $\overline{P_2P_4}$ teilt. Diese sind kongruent nach dem SSS-Satz 5.42. Also sind die Winkel $\sphericalangle_{P_1P_2P_4}$ und $\sphericalangle_{P_3P_4P_2}$, welche Wechselwinkel sind, gleichgroß. Es folgt dann, daß die Geraden $g(P_1, P_2)$ und $g(P_4, P_3)$ parallel sind.
Analog zeigt man, daß die beiden anderen Seiten parallel sind.

7 Hilfe zur Prüfungsvorbereitung

Wir haben uns im Laufe der Vorlesung einiges an Wissen und Fertigkeiten erarbeitet. Hier findest Du eine Liste dieser Punkte. Alle Aufgaben der Klausur stehen in engem Bezug zu diesen Kompetenzen und können mithilfe dieser beantwortet werden. Natürlich ersetzt dieser Kompetenzkatalog nicht die gründliche Durcharbeitung des Skripts. Allerdings gibt er Hinweise, welche Stellen des Skripts relevanter beziehungsweise weniger relevant für das Erlangen der Lernziele dieses Kurses sind. Alle Angaben in diesem Kompetenzkatalog sind ohne Gewähr und dienen nur dazu, Dir die Prüfungsvorbereitung zu erleichtern. Jeder Punkt im Kompetenzkatalog verfügt außerdem über Verweise ins Skript die Aufgaben, um das einfache Nachschlagen der Inhalte zu ermöglichen.
Die Formulierungen im Kompetenzkatalog sind mit Bedacht gewählt und geben Hinweis darauf, in welchem Ausmaß Sie eine gegebene Kompetenz beherrschen sollten. Um Missverständnisse zu vermeiden, sind hier die wichtigsten Formulierungen zusammengefasst und erläutert:

Ich kann ... ***beweisen*** **// Ich kann** ***folgern*** ...

Hier solltest Du in der Lage sein, das in Rede stehende Resultat zu formulieren und den Beweis vorzuführen.
Falls im Beweis auf andere Resultate verwiesen wird, dann solltest Du in der Lage sein, auch diese zu formulieren – die Kenntnis ihrer jeweiligen Beweise wird aber nicht notwendigerweise von Dir erwartet. Eine mögliche Klausuraufgabe wäre zum Beispiel die wesentlichen Schritte eines Beweises anhand einer Skizze zu erklären.

Ich kann ... ***formulieren*** **// Ich kann** ... ***definieren*** **// Ich** ***kenne die Definition***

Hier geht es um Definitionen, die Du wiedergeben können solltest. Hier wird Wert auf mathematische Korrektheit und Präzision gelegt.

Ich ***weiß***, ... **// Ich** ***kenne*** ... **// Ich** ***kann*** ... ***erklären***

Hier geht es um Resultate konkrete Ideen, die Du wiedergeben können solltest. Auch hier wird Wert auf mathematische Korrektheit und Präzision gelegt. Es ist hier nicht erforderlich, auch den zugehörigen Beweis vorführen zu können.

Ich kann ... ***in verschiedenen Situationen anwenden***

Hier steht üblicherweise ein Satz oder ein Hilfsresultat im Mittelpunkt, das wir im Laufe der Vorlesung an verschiedenen Stellen angewandt haben. Das Ziel sollte sein, eine Intuition dafür zu entwickeln, in welchen Situationen man das Hilfsresultat gewinnbringend einsetzen kann. (Falls nicht ausdrücklich verlangt, wird nicht von Dir verlangt, den Beweis des Hilfsresultats vorzuführen.)

In der Prüfung könnten wir Dir beispielsweise eine konkrete Problemstellung vorlegen, die sich mithilfe derartiger Resultate in wenigen Zeilen lösen lässt. Typische Aufgaben wären hier kleine Beweisaufgaben, wie wir sie in den Übungen behandelt haben. Um Dir die Möglichkeit zu geben, solche Anwendungssituationen gezielt zu trainieren, führen wir hier stets „primäre“ und „sekundäre“ Verweise an: Primäre Verweise geben an, wo das in Rede stehende Hilfsresultat zu finden ist, und sekundäre Verweise zeigen konkrete Anwendungssituationen auf. Es wird nicht von Dir erwartet, sämtliche Anwendungssituationen auswendig aufsagenzukönnen; es schadet aber sicherlich nicht, eine exemplarische Anwendung im Kopf zu haben.

7.1 Kompetenzkatalog

7.2 Beispielhafte Prüfungsaufgaben

Aufgabe 7.1. Es seien A, B, C drei Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Es ist

$$\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

genau dann, wenn ....

Aufgabe 7.2. Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Wir bezeichnen mit $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an g. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gilt $\sigma_g(P) = P$ genau dann, wenn ....

Aufgabe 7.3. Seien $A \neq B \subset \mathbb{R}^2$. Wie könnte man mit etwas linearer Algebra die Gerade durch A und B beschreiben?

Aufgabe 7.4. Seien $A \neq B \subset \mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Mengen des $\mathbb{R}^2$ beschreiben die Strecke zwischen A und B?
(Mehrere Antworten möglich.)

(i) $\{A - \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in [0, 1]\}$

(ii) $\{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in [0, 1]\}$

(iii) $\{B - \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in [0, 1]\}$

(iv) $\{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(v) $\{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in [-1, 1]\}$

Aufgabe 7.5. Was sind die Fixpunktmengen einer Spiegelung, einer Drehung, einer Verschiebung und der Identität?
Keine Begründung notwendig.

Aufgabe 7.6. Was war die Motivation der griechischen Geometer in der Antike, Mathematik zu betreiben?
(Mehrere Antworten möglich.)

(i) Das Messen von Feldern.

(ii) Logisches Denken zu fördern.

(iii) Die Vorbereitung auf das Studium der Philosophie.

(iv) Das Errichten monumentaler Bauwerke.

(v) Das Entwickeln einer rigorosen Diskussionskultur.

Aufgabe 7.7. Beschreibe kurz, was der Mathematikunterricht in der Schule Deiner Meinung nach erreichen sollte.

Aufgabe 7.8. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(i) Euklid versuchte die ebene Geometrie axiomatisch aufzubauen.

(ii) Euklid's Axiomensystem ist vollständig, aber altmodisch formuliert.

(iii) Euklid's Definition des Punktes genügt den Ansprüchen logischer Exaktheit.

(iv) Es ist offensichtlich, wie man das Konzept eines Punktes in einem logisch abgeschlossenen System abbildet.

(v) Euklid's Axiomensystem besteht aus Definitionen, Postulaten und Axiomen, aus denen er im Anschluss Propositionen herleitet.

(vi) Das Postulat des Parallelenaxioms ist das komplizierteste von Euklid's Postulaten und war historisch umstritten.

(vii) Euklid's Beweise haben keine Lücken.

(viii) Euklid gibt auch Konstruktionen für gewisse geometrische Figuren an.

Aufgabe 7.9. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(i) Axiome sind Grundannahmen, die nicht bewiesen werden müssen.

(ii) Die Axiome der ebenen Geometrie müssen nicht auf der Realität basieren.

(iii) Die Axiome müssen hinreichend sein, um alle uns aus der Anschauung bekannten geometrischen Eigenschaften abzuleiten.

(iv) Ein Axiomensystem sollte widerspruchsfrei und vollständig sein.

(v) Primitive Terme müssen definiert werden.

(vi) Primitive Terme sind Grundbegriffe, die nicht definiert werden.

Aufgabe 7.10. Es sei $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an g und ρ eine Drehung um einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$. Genau wann ist die Verknüpfung $\sigma_g \circ \rho$ wieder eine Spiegelung? *(Kein Beweis erforderlich.)*

Aufgabe 7.11. Sei $\tau \neq \mathrm{id}$ eine Verschiebung in $\mathbb{R}^2$ und $\rho \neq \mathrm{id}$ eine Drehung. Zeige, daß dann gilt $\tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau$.
Hinweis: *Man kann benutzen, daß Verschiebungen keine Fixpunkte und Drehungen genau einen Fixpunkt haben.*

Aufgabe 7.12. Seien g und h Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit Schnittpunkt P. Zeige, daß deren Scheitelwinkel gleich groß sind.
(Es kann verwendet werden, daß Nebenwinkel zusammen das Winkelmaß π haben.)

Aufgabe 7.13. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Im $\mathbb{R}^2$ ist die Länge eines Kreises vom Radius 1 gegeben durch.........

Aufgabe 7.14. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt:

(i) Zwei nicht-parallele Geraden im $\mathbb{R}^2$ schneiden sich in genau einem Punkt.

(ii) Jede längenerhaltende Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist winkelerhaltend.

(iii) Jede winkelerhaltende Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist längenerhaltend.

(iv) Zwei Strecken im $\mathbb{R}^2$ sind genau dann kongruent, wenn sie gleich lang sind.

(v) Ein n-Eck im $\mathbb{R}^2$ ist immer durch die Eckpunkte festgelegt.

Aufgabe 7.15. Seien $A \neq B$ Punkte des $\mathbb{R}^2$. Gib die eindeutige Verschiebung an, die A auf B abbildet.

Aufgabe 7.16. Gib in einer Skizze die Definition von Stufenwinkeln (F-Winkeln), Ergänzungswinkeln (E-Winkeln) und Wechselwinkeln (Z-Winkeln) an.

Aufgabe 7.17. Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ vier Punkte, so daß $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BD})$ und, so daß der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ mit dem Mittelpunkt von $\overline{BD}$ übereinstimmt. Zeige, daß A, B, C, D die Eckpunkte eines Rechtecks sind.

Aufgabe 7.18. Wir betrachten einen Kreis im $\mathbb{R}^2$. (Skizze)

(i) Konstruiere den Mittelpunkt des Kreises mit Zirkel und Lineal.
(Es muss klar ersichtlich sein, wie die Konstruktion durchgeführt wurde.)

(ii) Beschreibe in Worten die Konstruktion, welche Du gerade ausgeführt hast.

(iii) Gib eine kurze Begründung, warum diese Konstruktion den Mittelpunkt liefert.

Aufgabe 7.19. Wir betrachten einen Winkel im $\mathbb{R}^2$. (Skizze)

(i) Konstruiere Winkelhalbierende des Winkels mit Zirkel und Lineal.
(Es muss klar ersichtlich sein, wie die Konstruktion durchgeführt wurde.)

(ii) Beschreibe in Worten die Konstruktion, welche Du gerade ausgeführt hast.

(iii) Gib eine kurze Begründung, warum diese Konstruktion Winkelhalbierende liefert.

Aufgabe 7.20. Es seien $g, h \subset \mathbb{R}^2$ zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P mit Schnittwinkel α schneiden. Die Verknüpfung der Spiegelungen σ_g an g und σ_h an h ist eine Drehung. Was ist der zugehörige Drehwinkel?
(Keine Begründung notwendig.)

Aufgabe 7.21. Ergänze den folgenden Satz:
Bewegungen im $\mathbb{R}^2$ sind .... erhaltend und .... erhaltend.

Aufgabe 7.22. Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Bewegung?

(i) Die Drehung $\rho_{(P,\alpha)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel $\alpha > 0$.

(ii) Die Streckung $\chi_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit dem Faktor $\lambda \neq 1$.

(iii) Die Verschiebung $\tau_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Richtungsvekktor $v \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Die Drehstreckung $\psi_{(P,\alpha,\lambda)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel $\alpha > 0$ mit dem Faktor $\lambda \neq 1$.

(v) Die Spiegelung $\sigma_g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Geraden g.

Aufgabe 7.23. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Zwei Geraden sind nicht parallel, genau dann, wenn ....

Aufgabe 7.24. Sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Zeige:
Ist $\angle(BAC) = \angle(ABC)$, so folgt $\ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC})$. In anderen Worten, das Dreieck ist gleichschenklig.

Aufgabe 7.25. Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis. Vervollständige die folgenden Definitionen:

(i) Eine .... ist eine Gerade, die $\mathcal{K}$ nicht schneidet.

(ii) Eine .... ist eine Gerade, die $\mathcal{K}$ in genau einem Punkt schneidet.

(iii) Eine .... ist eine Gerade, die $\mathcal{K}$ in genau zwei Punkten schneidet.

Aufgabe 7.26. Wieviele verschiedene Punkte reichen aus, um eine Gerade in der euklidischen Ebene *eindeutig* zu beschreiben?

1 2 3 4 Das kann man allgemein nicht sagen.

Aufgabe 7.27. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
Der Mittelpunkt des Umkreises eines jeden Dreiecks ist gleich dem Schnittpunkt ....

Aufgabe 7.28. Seien P ein Punkt der euklidischen Ebene und $r > 0$. Beschreibe die Punkte, die auf dem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius r liegen.

Aufgabe 7.29. Was ist die Summe der Innenwinkel eines einfachen Fünfecks?

Aufgabe 7.30. Berechne den Abstand $\ell(\overline{AB})$ zwischen den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7.31. Ordne die jeweilige Figur ihrem Durchmesser zu:

Kreis mit Radius r	r
gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge r	$\sqrt{2}r$
Quadrat mit Seitenlänge r	$2r$

Aufgabe 7.32. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$.
Zeige: Ist $r < \frac{1}{2}\ell(\overline{AB})$, so schneiden sich die beiden Kreise $\mathcal{K}(A, r)$ und $\mathcal{K}(B, r)$ nicht.

Aufgabe 7.33. Seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(i) Was ist die Definition der Mittelsenkrechten zu A und B?

(ii) Es sei $Q \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt mit $\ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})$. Zeige, daß Q auf der Mittelsenkrechte zu A und B liegt.

(iii) Es sei $\triangle_{ABC}$ ein Dreieck. Schneiden sich die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks immer innerhalb des Dreiecks? Gib eine kurze Begründung für Deine Antwort.

Aufgabe 7.34. Sei $\mathcal{K}(P, r)$ ein Kreis und $Q \neq \mathcal{S}(P, r)$.

(i) Wieviele Tangenten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(ii) Wieviele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(iii) Wieviele Passanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q gibt es?

(iv) Wieviele Sekanten zu $\mathcal{K}(P, r)$ durch Q und durch P gibt es?

Danksagung

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Prof. Friedl dafür, daß er mir sein Skript und Aufgaben bereit gestellt hat, die maßgeblich zu diesem Skript beigetragen haben. Inspiriert wurde ich auch von den Vorlesungsskripten vieler Kollegen, wie Prof. Huber (Freiburg), Prof. Dreher (Rostock), Prof. Sprang (Duisburg-Essen).

Literatur

[1] Ilka Agricola, Thomas Friedrich: *Elementargeometrie*. Vieweg, Wiesbaden, (2005).

[2] Siegfried Bosch: *Lineare Algebra*. 3. Auflage, Springer Verlag, (2006).

[3] Emil Donath: *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks*. Mathematische Schülerbücherei, Nr. 44, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, (1976).

[4] Euklid: *Die Elemente. Bücher I–XIII.* (nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thar, Teile 1–5), Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, (1933–1937).

[5] Stefan Friedl: *Elementargeometrie*. Skript für das Wintersemester (2019/20).

[6] David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 9. Auflage, (1962).

[7] Max Koecher und Aloys Krieg: *Ebene Geometrie*. 3. Auflage, Springer Verlag, (2007).

[8] George Polya: *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke Verlag, (1980).

[9] Harald Scheid, Wolfgang Schwarz: *Elemente der Geometrie*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 4. Auflage, (2009).