

Thema Nr. 1

(Aufabengruppe)

Es sind **alle** Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

Aufgabe 1 (Frühjahr 2006). Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und U, V Untergruppen. Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind: (4 Punkte)

- (a) Die Gruppe G ist direkte Summe von U und V .
- (b) Für alle $a, b \in G$ haben die Nebenklassen $a + U$ und $b + V$ jeweils genau ein gemeinsames Element.

Aufgabe 2 (Frühjahr 2012). Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ ist das Polynom $(x-1)^2$ ein Teiler von $f = ax^{30} + bx^{15} + 1$? (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Frühjahr 1995). Sei F/K eine nichttriviale endliche Galoisweiterung mit auflösbarer Galoisgruppe. Zeigen Sie, daß es einen Zwischenkörper $K \subset E \subset F$ gibt, so daß E/K Galois'sch mit abelscher Galoisgruppe ist. (4 Punkte)

Zusatzaufgabe (Frühjahr 1981). Man gebe für die folgenden Fälle jeweils ein Beispiel an oder begründe kurz, warum es ein derartiges Beispiel nicht gibt: (4 Punkte)

- (a) eine einfache nicht-abelsche Gruppe,
- (b) ein kommutativer Körper mit genau 6 Elementen,
- (c) ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[X, Y]$ das nicht Hauptideal ist,
- (d) ein irreduzibles Polynom 3. Grades in $\mathbb{R}[X]$.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind **alle** Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.**Aufgabe 1** (Frühjahr 2014). Es seien A, B komplexe $(n \times n)$ -Matrizen mit $AB = BA$. (4 Punkte)

- (a) Man zeige, daß B jeden Eigenraum von A invariant lässt, d.h.:
Für jeden Eigenraum U von A gilt $Bu \in U$ für alle $u \in U$.
- (b) Man zeige, daß A und B einen gemeinsamen Eigenvektor haben, d.h.:
Es gibt $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $Av = \lambda v$, $Bv = \mu v$.
- (c) Man zeige anhand eines Beispiels, daß die Aussage aus (b) ohne die Voraussetzung $AB = BA$ im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2. Sei $K = \mathbb{C}(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{C}[t]$ und $f = x^3 - 2tx + t \in K[x]$. Zeigen Sie, daß f irreduzibel in $K[x]$ ist. (3 Punkte)**Aufgabe 3** (Herbst 2016). Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gleichen Grades, so daß $\text{Gal}(f)$ und $\text{Gal}(g)$ gleich viele Elemente habe, aber $\text{Gal}(f)$ abelsch und $\text{Gal}(g)$ nicht abelsch ist. (4 Punkte)**Zusatzaufgabe** (Frühjahr 1981). Man gebe für die folgenden Fälle jeweils ein Beispiel an oder begründe kurz, warum es ein derartiges Beispiel nicht gibt: (4 Punkte)

- (a) eine auflösbare nicht-abelsche Gruppe,
- (b) eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 7,
- (c) ein maximales Ideal in $\mathbb{Q}[X, Y]$ das nicht Hauptideal ist,
- (d) ein irreduzibles separables Polynom 2. Grades in $\mathbb{F}_2[X]$.