Sei ζ_3 eine primitive dritte Einheitswurzel, ζ_4 eine primitive vierte Einheitswurzel. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Man betrachte die Erweiterungen $K(\zeta_4)/K$ und $K(\zeta_3)/K$ und zeige, daß der Schnitt $K(\zeta_3) \cap K(\zeta_4)$ den Grundkörper K echt enthält.
Hinweis: $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Lösung. Es gibt in $\mathbb{C}$ zwei primitive vierte Einheitswurzeln ($e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ und $e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i$), und zwei primitive dritte Einheitswurzeln ($e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$).
Ohne Einschränkung wÄhlen wir $\zeta_3 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\zeta_4 = i$.

Dann ist

$$K(\zeta_4) = K(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$$
$$K(\zeta_3) = K(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$$

Das heißt

$$K(\zeta_4) = K(\zeta_4) \cap K(\zeta_3) = K(\zeta_3)$$

und

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = K(\zeta_4) \cap K(\zeta_3)$$

denn $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ aber $K \subset \mathbb{R}$.