Eine Gruppe $G$ operiere auf einer Menge $X$. Zeigen Sien: Ist $|G| = 55$ und $|X| = 18$, so besitzt die Operation midestens zwei Fixpunkte.

*Lösung.* Sei $X_0$ die Menge der Fixpunkte, $T$ eine Transversale der Operation. Nach der Bahnengleichung wissen wir

$$|X| = |X_0| + \sum_{x \in T \setminus X_0} [G : G_x]$$

wobei $G_x$ der Stabilisator von $x$ ist. Für Fixpunkte gilt $G_x = G$, und $Gx = [G : G_x] = 1$. Für alle anderen Punkte gilt $G_x \subsetneq G$ ist eine echte Untergruppe. Da $|G| = 55$ muss also $|G_x| \in \{1, 5, 11\}$. Ist $|G_x| = 1$, so ist nach Lagrange $[G : G_x] = 55$. Dies kann ausgeschlossen werden, da $|X| = 18$. Also muss für alle Nicht-FIxpunkte gelten $[G : G_x] = 5$ oder $[G : G_x] = 11$. Nach der Klassengleichung muss also

$$18 = |X| = |X_0| + \sum_{x \in T \setminus X_0} [G : G_x] = |X_0| + a5 + b11$$

mit natürlichen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dies ist nur möglich, wenn $|X_0| \geqslant 2$.