Sei A ein Ring (mit eins), $x \in A$ nilpotent, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$. Zeigen Sie, daß $1-x$ invertierbar ist.

Lösung. Wir erinnern uns an folgende sehr nützliche Identität:

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}).$$

Man sieht leicht, daß dies für beliebige natürliche Zahlen $k \geqslant 1$ gilt. Insbesondere gilt es für $k = n$:

$$1 = 1 - 0 = 1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

Also ist $1 - x$ invrtierbar mit Inversem $(1 - x)^{-1} = (1 + x + \ldots + x^{n-1})$.