

Sei K ein Körper. Man berechne das Produkt $\prod_{x \in K^*} x$.

Lösung. In dem Produkt paaren wir jedes Element mit seinem Inversen. Dies ist möglich, wenn sie verschieden sind, und in diesem Fall erhält man $xx^{-1} = 1$. Daraus schließt man

$$\prod_{x \in K^*} x = \prod_{x=x^{-1}} x = \prod_{x^2=1} x.$$

In einem Körper hat die Gleichung $x^2 = 1$ die Lösungen $\{\pm 1\}$. Sind diese verschieden $1 \neq -1$, so ergibt das Produkt -1 . Stimmen sie überein, so erhält man 1 , also

$$\prod_{x \in K^*} x = \begin{cases} -1 & \text{falls } 1 \neq -1 \\ 1 & \text{falls } 1 = -1 \end{cases}$$