

Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal?

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q} \\ & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q} \\ & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

*Lösung.* Die Erweiterung  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$  ist quadratisch, denn das Minimalpolynom von  $\sqrt{3}$  über  $\mathbb{Q}$  ist  $X^2 - 3$ . Also ist  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$  normal.

Die Erweiterung  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$  ist ebenso quadratisch, das Minimalpolynom von  $\sqrt[4]{3}$  über  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  ist  $X^2 - \sqrt{3}$ . Also ist diese Erweiterung ebenso normal.

Aber  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$  ist nicht normal: das Minimalpolynom von  $\sqrt[4]{3}$  über  $\mathbb{Q}$  ist  $X^4 - 3$ , denn  $\sqrt[4]{3}$  ist eine Nullstelle und das Polynom ist irreduzibel nach Eisenstein. Es zerfällt jedoch über  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$  nicht in Linearfaktoren, sondern nur in  $(X - \sqrt[4]{3})(X + \sqrt[4]{3})(X^2 + \sqrt{3})$ .