Sei $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Man bestimme die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ der Erweiterung L/K.

Lösung. Setze $K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $K_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Die Minimalpolynome von $\alpha_1 = \sqrt{2}$ und $\alpha_2 = \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ sind

$$m_{\mathbb{Q},\alpha_1} = X^2 - 2$$
$$m_{\mathbb{Q},\alpha_2} = X^2 - 3$$

Also sind die Erweiterungen K_i/K quadratisch, und damit normal. Außerdem sind sie separabel, folglich Galois'sch.
Wir haben bereits gesehen, daß die Körper K_1 und K_2 nicht isomorph sind. Daraus folgt, daß der Schnitt $K_1 \cap K_2$ jeweils ein echter Unterkörper ist r und $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$. Ebenso ist das Kompositum K_1K_2 jeweils ein echter Oberkörper, genauer $K_1K_2 = L$.
Die natürliche Abbildung

$$\psi : \mathrm{Gal}(K_1K_2/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K_1/\mathbb{Q}) \times \mathrm{Gal}(K_2/\mathbb{Q}), \sigma \mapsto (\sigma\big|_{K_1}, \sigma\big|_{K_2})$$

ist ein Isomorphismus. Also gengüt es die Galoisgruppen von $K_i/\mathbb{Q}$ zu betimmen. Es gilt $|\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})| = [K_i : \mathbb{Q}] = 2$, und

$$\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}, \sigma_i\}$$

wobei σ_i eindeutig bestimmt ist durch $\sigma_i(\alpha_i) = -\alpha_i$. Also ist $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Und

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Genauer ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}$, wobei diese Elemente eindeutig bestimmt sind durch

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{id}(\alpha_1) = \alpha_1 & \mathrm{id}(\alpha_2) = \alpha_2 \\
\sigma_1(\alpha_1) = -\alpha_1 & \sigma_1(\alpha_2) = \alpha_2 \\
\sigma_2(\alpha_1) = \alpha_1 & \sigma_2(\alpha_2) = -\alpha_2 \\
\sigma_1\sigma_2(\alpha_1) = -\alpha_1 & \sigma_1\sigma_2(\alpha_2) = -\alpha_2
\end{array}$$