Das Algebra-Staatsexamen

Das Staatsexamen ist für die meisten in diesem Kurs eine wichtige Prüfung auf ihrem Karriereweg – der Abschluss ihrer Universitätszeit, danach beginnt „der Ernst des Lebens“. Ein gutes Abschneiden ist für die meisten wichtig, aus persönlichen Gründen, weil die Note darüber bestimmen kann ob oder wo man Referendarstellen erhält.
Da Gymnastiallehrer in Bayern in der Regel zwei oder mehr Fächer studieren, die sie später unterrichten werden, ist es oft eine Herausforderung, sich auf Prüfungen in beiden Fächern, sowie auf das Examen in Didaktik vorzubereiten.
In der Mathematik kommt hinzu, dass es nicht genügt Konzepte auswendig zu lernen, sondern auch wissen muss, wie man diese anwendet. Dies erfordert Übung und ein regelmäßiges Befassen mit der Materie.
Einige von den Teilnehmern hab sich womöglich eine Zeit lang nicht mit Algebra und Zahlentheorie beschäftigt, um ihre Verpflichtungen in den anderen Fächern erfülen zu können.
Sie sehen sich nun vor einem Berg von Material, das sie bis zum Examen beherrschen sollen, aber wissen vielleicht nicht, wie sie damit anfangen sollen. Dieser Kurs ist ein Angebot zur Unterstützung bei der Vorbereitung. Es liegt an den Teilnehmern, dieses Angebot zu nutzen.

Die Vorbereitung

Es ist von Vorteil, wenn man frühzeitig mit der Vorbereitung beginnt. Gerade in einer solch stressigen Zeit wie der Vorbereitung auf Prüfungen, ist es wichtig gut zu planen. Manchmal tendieren wir dazu Aufgaben, die uns Angst machen, weil wir denken, dass wir sie eh nicht bewältigen können, vor uns her zu schieben – mit dem Resultat, dass es am Ende noch stressiger wird. Es ist leichter, einen solchen Berg aufzuteilen, und diese kleineren AUfgaben nach und nach abzuarbeiten – „one step at a tiem“.
Dazu verschaffen wir uns zunächst einen **Überblick** über den gesamten Umfang des Stoffes. Wir können dazu ein beliebiges Algebraskript zur Hand nehmen und durchblättern. Meist fällt es uns mit dem Skript, aus der Vorlesung, die wir im Studium besucht haben am leichtesten. Schnell stelle wir fest, dass es **drei Hauptthemen** gibt, die in der Regel behandelt werden: **Gruppentheorie, Ringtheorie und Körpertheorie**, meist in dieser Reihenfolge, da diese aufeinander aufbauen. In der Körpertheorie ist die **Galoistheorie** ein wichtiges Unterthema.
Dazu kommt dann noch **Lineare Algebra** und **Elementare Zahlentheorie**. Diese sind Grundvoraussetzungen und fallen vielen leichter.
Nachdem wir uns einen Überblick verschafft haben, überlegen wir uns, **wieviel Zeit wir für welches Thema** aufwenden wollen. Versuchen wir einzuschätzen, welche Themen uns leichter fallen, vielleicht, weil wir sie noch besser im Gedächtnis haben, und welche Themen uns mehr Kopfschmerzen bereiten, so dass wir mehr Zeit für sie einplanen müssen.
Da es wichtig ist auch die **Konzepte der Linearen Algebra** im Kopf zu haben, ist in der nächsten Vorlesung eine kurze Wiederholung der wichtigsten Konzepte daraus eingeplant. Danach werden wir uns drei Wochen lang mit der **Gruppentheorie** beschäftigen. Vier Wochen sind für **Ringtheorie** vorgesehen. Ab Mitte Dezember werden wir uns der **Körpertheorie** zuwenden und dann ab Mitte Januar ein besonderes Augenmerk auf die **Galoistheorie** richten.
Wir werden jeweils die **wichtigsten Konzepte und Sätze** kurz wiederholen, und uns dann an das **Lösen von Aufgaben** machen. Daher sind die Studenten im Vorteil, die sich bereits **vor der jeweiligen Vorlesung mit dem entsprechenden Thema vertraut gemacht** haben. Wenn **Fragen** aufkommen, versuchen wir sie möglichst schnell zu klären. Es ist oft hilfreich mit anderen Studenten zu reden – vielleicht hatten sie bereits ähnliche Fragen. Textbücher und Vorlesungsskripte, oder das Internet im Allgemeinen stellen auch eine gute Quelle dar. Der Dozent ist immer für Fragen **während, vor oder nach der Vorlesung** offen. Man sollte sich nichts dabei denken, Fragen in der Vorlesung zu stellen, oder zu sagen, dass einem etwas nicht klar ist. Im Gegenteil, oft haben andere die gleichen oder ähnliche Probleme, und sind froh, wenn jemand sie formuliert, und der Punkt geklärt werden kann.
Es ist natürlich etwas anderes, ob man jemandem, in dem Fall dem Dozenten, beim Lösen einer Aufgabe zuschaut, oder ob man **selbst versucht sie zu lösen**. Um die Angstschwelle zu mindern, werden wir jede Woche ein **Miniquiz** von circa 10 Minuten schreiben, und anschließend die Lösung besprechen. Es ist jedoch auch wichtig **selbstständig zu üben**. Dazu werden regelmäßig Aufgaben vorgeschlagen. Natürlich sollte man sich auch an die individuellen Bedürfnisse angepasst weitere Aufgaben heraussuchen und sie selbstständig bearbeiten.
Um die Prüfungssituation zu üben, werden wir **über jedes der drei Hauptthemengebiete**, die wir

besprechen, eine **Probeklausur** schreiben. Diese wird korrigiert und in der folgenden Woche besprochen. Am Ende wird es eine **Probeklausur über den gesamten Stoff** geben. Dies sollte als Möglichkeit gesehen werden, **sich selbst zu testen** und herauszufinden, wie weit man in der Vorbereitung ist, und was man noch genauer bearbeiten sollte.

Aufgaben

Manchmal erhält man im Examen Aufgaben, die nicht viel Wissen voraussetzen und mit logischem Denken gelöst werden können. Auf solche wollen wir uns heute konzentrieren.

Aufgabe 1 (F15T2A1). Man bestimme alle Paare von Primzahlen p, q mit $p^2 - 2q^2 = 1$.

Aufgabe 2. Man zeige, dass die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.
Hinweis:

(a) Sei $n \geqslant 1$. Man zeige, dass ganze Zahlen x_n und y_n existieren mit $(3+2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.

(b) Man stelle x_{n+1} und y_{n+1} als Funktion in x_n und y_n dar.

(c) Man folgere daraus, dass die Folgen (x_n) und (y_n) streng monoton wachsend sind.

(d) Man zeige die Behauptung.

Aufgabe 3. Manchmal sind im Examen, zum Beispiel in der Gruppentheorie, Aufgaben zu bearbeiten, die „irgendetwas“ mit der Jahreszahl des Examens zu tun haben. Daher kann es hilfreich sein, die Primfaktorzerlegung der Jahreszahl zu kennen.
Man bestimme alle Teiler sowie die Primfaktorzerlegung von 2019.

Aufgabe 4. Man berechne $(1+i)^{4n}$ und nutze das Resultat um

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{4n}{2k+1}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 5. Sei $k \geqslant 1$. Man zeige, dass $k!$ alle Produkte naürlicher Zahlen teilt, die aus k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen bestehen.

Aufgabe 6. (a) Man entwickle $(x+1)^6$ und $(x-1)^6$.

(b) Man vereinfache die komplexen Zahlen $(1+i)^5$ und $(1-i)^4$.

(c) Man zeige für jede natürliche Zahl n, dass

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$