Aufgabe 1 (Frühjahr 2015). Ein Ring R mit Eins heißt idempotent, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt Beweisen Sie:

(a) $-1 = 1$ in R.

(b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ.

(c) Jeder idempotente Integritätsbereich is isomorph zu $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen. *(Dies werden wir später besprechen.)*

Aufgabe 2 (Herbst 1999). Die Menge $\mathbb{Z}^2$ ist ein Ring bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation. Wir untersuchen hier seine Ideale.

(a) Sei $I \lhd \mathbb{Z}^2$ ein Ideal und

$$\begin{aligned} I_1 &= \{x \in \mathbb{Z} \mid (x,0) \in I\} \\ I_2 &= \{y \in \mathbb{Z} \mid (0,y) \in I\} \end{aligned}$$

Man zeige, daß I_1 und I_2 Ideale von $\mathbb{Z}$ sind.

(b) Man zeige $I = I_1 \times I_2$.

(c) Man bestimme die Ideale von $\mathbb{Z}^2$

Aufgabe 3 (??). Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n$-Matix über den reellen Zahlen. Sei

$$K_A := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$$

die Menge der mit A vertauschbaren Matrizen.
Zeigen Sie, daß K_A eine $\mathbb{R}$-Agebra ist.

Aufgabe 4 (Herbst 1978). Sei E eine Menge und $A = \mathcal{P}(E)$ ihre Potenzmenge mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &E_1 \Delta E_2 = \{e \in E \mid e \in E_1 \cup E_2, e \notin E_1 \cap E_2\} \\ &E_1 \cap E_2 \end{aligned}$$

(a) Man zeige, daß $(A, \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Sei E endlich und $E' \subset E$. Man zeige, daß $I = \mathcal{P}(E')$ ein Ideal von A ist.

(c) Sei andererseits I ein Ideal von A. Sei $X, Z \in I$ und $Y \subset X$. Man zeige $Y \in I$ und $X \cup Z \in I$.

(d) Man zeige, daß es $E' \subset E$ gibt, so daß $I = \mathcal{P}(E')$.

(e) Sei E unendlich. Man zeige, dass die Menge der endlichen Teilmengen von E ein Ideal von A bilden, das nicht on der Form $\mathcal{P}(E')$ ist.

Aufgabe 5 (Herbst 1975). Sei R ein endlicher kommutativer Ring (nicht notwendig mit 1). Beweisen Sie, daß jedes Element $x \in R$ eine der drei folgenden Aussagen erfüllt:

(a) x ist 0 oder nilpotent,

(b) x ist eine Einheit in R,

(c) eine Potenz von x ist idempotent.