Aufgabe 1 (Einstimmung)**.** Seien $p(X) = X^{500} - 2X^{301} + 1$ und $q(X) = X^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$. Man berechne den Rest von $p(X)$ bei Division mit $q(X)$.

Aufgabe 2 (Frühjahr 2014)**.** Es seien K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in einer Unbekannten. Sei $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:
Ist $m > 1$, dann ist $X^r - 1$ der Rest bei Division von $X^n - 1$ durch $X^m - 1$, wobei r der Rest bei Division von n durch m ist.

Aufgabe 3 (Herbst 1987)**.** R sei ein kommutativer Ring mit Eins und d eine Derivation von R, das heißt eine Abbildung $d : R \to R$ mit

$$d(x+y) = dx + dy \quad , \qquad d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx \qquad \text{für alle } x, y \in R.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\ker(d) := \{x \in R;\ dx = 0\}$ eine Unterring von R ist, der die Eins enthält.

(b) Beweisen Sie die Formel $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ für $x \in R$, $n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

(c) Zeigen Sie daß der Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^2)$ eine nicht-triviale Derivation besitzt.

Aufgabe 4 (Frühjahr 1972)**.** Sei $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom mit der Eigenschaf, daß es ganze Zahlen a, b gibt mit $P(a) - P(b) = q$, wobei q eine Primzahl ist. Zeigen Sie, daß $a - b$ nur einen der Werte $-q, -1, 1, q$ annehmen kann.

Aufgabe 5 (Herbst 1981)**.** Lösen Sie folgende Gleichungen für Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

(a) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

(b) $Q(Q(X)) = Q(X)$.

Aufgabe 6 (Frühjahr 1993)**.** Für $P \in \mathbb{R}[X]$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, sei 1 der Rest bei Division von P durch $(X - a)$ und -1 der Rest bei Division von P durch $(X - b)$.
Was ist der Rest bei Division von P durch $(X - a)(X - b)$?

Aufgabe 7 (Frühjahr 1991)**.** Sei K ein Körper und $A, B, P \in K[X]$, P nicht konstant. Angenommen $A \circ P \big| B \circ P$. Man zeige $A \big| B$.