Aufgabe 1 (Frühjahr 1980). Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Jede Erweiterung von K vom Grad 2 ist normal über K.

Aufgabe 2 (Herbst 2002).

(a) Zerlegen Sie das Polynom $f := X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren.

(b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper Z von f über $\mathbb{Q}$ und $[Z : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 3 (Frühjahr 1984). Es sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom und α, β Nullstellen von f in einem geeigneten Erweiterungskörper von K. Es sei $\gamma = \alpha - \beta \in K$. Zeigen Sie:

(a) $f(X + \gamma)$ ist normiert und irreduzibel in $K[X]$.

(b) Für jede natürliche Zahl n gilt $f(X + n\gamma) = f$.

(c) $\alpha = \beta$.

Aufgabe 4 (Herbst 1991). $K(z)$ sei eine einfache transzendente Erweiterung des Körpers K. Man beweise die beiden folgenden Aussagen:

(a) $K(z^2)$ ist eine transzendente Erweiterung von K.

(b) Es gibt unendlich viele Zwischenkörper zwischen K und $K(z)$.