Aufgabe 1 (Frühjahr 2009). (a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Seien M der Zerfällungskörper von $X^{15} - 10$ über $\mathbb{Q}$ und G die Automorphismengruppe von M über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Gruppe G und zeigen Sie, daß G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist.

Aufgabe 2 (Herbst 2003). Beweisen Sie:

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Aufgabe 3 (Frühjahr 2004). Es sein $n > 2$ und ζ eine primitive n-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

$$[\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2}\varphi(n),$$

wobei φ die Euler'sche φ-Funktion bezeichnet.

Aufgabe 4 (Frühjahr 2004). Für Primzahlpotenzen q bezeichne $\mathbb{F}_q$ den Körper aus q Elementen.

(a) Bestimmen Sie die kleinste Zweierpotenz $q = 2^m$, so daß der Körper $\mathbb{F}_q$ eine primitive 17-te Einheitswurzel enthält.

(b) Es sei α ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{F}_{256}$. Welchen Grad hat das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{F}_2$? Welche Potenzen von α sind Nullstellen von f?

(c) Es sei α wie in (b). Zeigen Sie unter Benutzung der Galois-Theorie, daß das Polynom

$$g(X) = (X-\alpha)(X-\alpha^4)(X-\alpha^{16})(X-\alpha^{64})$$

Koeffizienten in $\mathbb{F}_4$ hat.

Aufgabe 5 (Frühjahr 1998). Es sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel von ungeradem Grad m. Sei ω eine primitive siebzehnte Einheitswurzel. Zeigen Sie, daß $f(X)$ über $\mathbb{Q}(\omega)$ irreduzibel ist.