Aufgabe 1 (Frühjahr 2014)**.** Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, und sei K der Zerfällungskörper des Polynoms

$$p = x^3 + x + b \in \mathbb{Q}[x].$$

Wir nehmen an, daß p keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat. Zeigen Sie:

(a) p ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$ und hat keine mehrfache Nullstellen in K.

(b) Die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_3$.

(c) G hat entweder 3 oder 6 Elemente.

(d) Sei $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$ die Nullstellen von p sind. Dann gilt für $\sigma \in G$ stets $\sigma(\delta) = \delta$ oder $\sigma(\delta) = -\delta$.

(e) Gilte $\sigma(\delta) = \delta$ für alle $\sigma \in G$, dann ist G zyklische und hat Ordnung 3. Andernfalls ist $G = \mathfrak{S}_3$.

Aufgabe 2. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $a = k^2 + k + 7$. Man zeige: Das Polynom $X^3 - aX + a$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und hat Galoisgruppe isomorph zu A_3.

Aufgabe 3 (Frühjahr 1978)**.** (a) Jede endliche abelsche Gruppe ist isomorph zu einer Faktorgruppe der Gruppe

$$\prod_p \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z},$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft.
Hinweis: Man benutze den Dirichletschen Primzahlsatz: Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es unendlich viele Primzahlen mit $p \equiv 1 \mod n$.

(b) Jede endliche abelsche Gruppe ist isomorph zu einer Faktorgruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ der teilerfremden Reste modulo n, wenn n passend gewählt wird.

(c) Zu jeder endlichen abelschen Gruppe A gibt es eine Galois'sche Erweiterung $K/\mathbb{Q}$, deren Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ zu A isomorph ist.

(z) Man konstruiere eine Galoiserweiterung $K/\mathbb{Q}$ deren Galoisgruppe isomorph zu einer abelschen Gruppe der Ordnung 2019 ist.
Hinweis: 2693 ist prim in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (Herbst 1992)**.** Es sei $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ ein nichtkonstantes separables Polynom mit $a_0 a_n \neq 0$. Sei $g = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$ das sogenannte „reziproke" Polynom zu f. Zeigen Sie:
f und g haben die gleiche Galoisgruppe über K.