Aufgabe 1 (???)**.** Sei K ein Körper. Man zeige: Jede endliche Untergruppe von $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist zyklisch.

Aufgabe 2 (Frühjahr 1984)**.** Sei G eine Gruppe mit der Einsuntergruppe 1 und $P = G \times G$ das direkte Produkt von G mit sich selbst. Es sei $G_1 = G \times 1$ und $G_2 = 1 \times G$. Zeigen Sie:

(a) Die Diagonale $D = \{(g, g); g \in G\}$ ist eine Untergruppe von P.

(b) Für jede Untergruppe U zwischen D und P gilt: $U \cap G_i$ ist normal in G_i für $i = 1, 2$.

(c) Genau dann ist D eine maximale Untergruppe von P, wenn G einfach ist.

Aufgabe 3 (Frühjahr 1995)**.** Seien E, G Gruppen und $\pi : E \to G$ ein Epimorphismus. π heißt *zerfallend*, falls ein Homomorphismus $\rho : G \to E$ mit $\pi\rho = \mathrm{id}_G$ existiert.
Zeigen Sie: Ist π ein zerfallender Epimorphismus mit Kern K, so ist

$$K \times G \to E, (k, g) \mapsto k\rho(g) \quad \text{für alle } k \in K \text{ und } g \in G,$$

ein Isomorphismus, falls $K \times G$ mit der Gruppenstruktur des semidirkten Produktes bezüglich einer passenden Operation von G auf K versehen wird.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 2019.

Aufgabe 5 (Frühjahr 1996)**.** (a) Wie viele Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung 64 gibt es?

(b) Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, so daß es genau sechs Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung n gibt.

Aufgabe 6 (Herbst 2001)**.** (a) G sei eine endliche abelsche Gruppe, p das Produkt aller Elemente von G. Zeigen Sie:

$$p = \begin{cases} 1 & \text{falls } G \text{ kein oder mehr als ein Element der Ordnung 2 hat} \\ \mathrm{a} & \text{sonst, wobei } a \text{ dann das einzige Element der Ordnung 2 von } G \text{ ist.} \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl $n \neq 4$ teilt die Zahl $((n-1)!)^2 + (n-1)!$.