Aufgabe 1 (Frühjahr 2015)**.** Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

(a) G hat einen Normalteiler N der Ordnung 5 oder 7.

(b) G ist auflösbar.

Lösung. **Zu (a):** Die Primfaktorzerlegung von 105 ist $3 \cdot 5 \cdot 7$. Ist s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G, so gilt $s_7 \big| 3 \cdot 5 = 15$, also $s_7 \in \{1, 3, 5, 15\}$. Außerdem gilt $s_7 \equiv 1 \mod 7$, das schränkt s_7 ein auf 1 oder 15. Die gleich Argumentation liefert, da $s_5 \big| 3 \cdot 7$, $s_5 \in \{1, 3, 7, 21\}$, und wegen $s_5 \equiv 1 \mod 5$ also $s_5 \in \{1, 21\}$. Da 5 und 7 in der Primfaktorzerlegung von 105 gemnau einmal vorkommen, ist jede Untergruppe der Ordnung 5, bzw. 7, auch 5-Sylowuntergruppe, bzw. 7-Sylowuntergruppe. Wir nehmen nun an, daß G weder einen Normalteiler der Ordnung 5, noch einen Normalteiler der Ordnung 7 hat, insbesondere sind die 5- und 7-Sylowuntergruppen keine Normalteiler. Es folgt daß nicht nur jeweils eine 5- und eine 7-Sylowuntergruppe geben kann, dh. $s_5 = 21$ und $s_7 = 15$.
Wir zählen nun Elemente um zu zeigen, daß dies nicht der Fall sein kann. Jedes Element $g \neq e$ der Ordnung 5 liegt in einer 5-Sylowuntergruppe, nämlich in der von g erzeugten. Andererseits enthält jede 5-Sylowuntergruppe, da sie zyklisch ist $\varphi(5) = 4$ Elemente $\neq e$ der Ordnung 5. Das heißt, es gibt insgesamt

$$\varphi(5) \cdot s_5 = 4 \cdot 21 = 84$$

nicht-triviale Elemente der Ordnung 5. Genauso gibt es

$$\varphi(7) \cdot s_7 = 6 \cdot 15 = 90$$

nicht-triviale Elemente der Ordnung 7. Dies sind insgesamt bereits $84 + 90 = 174$ Elemente. Widerspruch zu $|G| = 105$.
Es folgt, daß entweder $s_7 = 1$ oder $s_5 = 1$, und G einen Normalteiler der Ordnung 7 oder 5 haben muß.

Zu (b): Wir wissen bereits, daß G einen Normalteiler N der Ordnung $|N| = 7$ oder $|N| = 5$ hat. Wir benutzen, daß G auflösbar ist, wenn es einen Normalteiler $N \triangleleft G$ gibt, so daß G/N und N auflösbar sind. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $|N| = 5$. Da N Primzahlordnung hat, also zyklisch ist, ist N abelsch, und damit auflösbar (sogar nilpotent). Wir müssen zeigen, daß G/N auflösbar ist. Nach Lagrange gilt

$$|G/N| = [G : N] = \frac{|G|}{|N|} = \frac{105}{5} = 21.$$

Wir zeigen, daß jede Gruppe H der Ordnung 21 auflösbar ist. Mit $21 = 3 \cdot 7$ sei s_3, bzw. s_7, die Anzahl der 3- bzw. 7-Sylowuntergruppen von H. Dann gilt $s_7 \big| 3$, also $s_7 \in \{1, 3\}$. Wegen $s_7 \equiv 1 \mod 7$ also $s_7 = 1$. Da es also nur eine einzige 7-Sylowuntergruppe M gibt, ist diese Normalteiler. Außerdem ist sie zyklisch von Primzahlordnung, also abelsch und damit auflösbar (sogar nilpotent). Weiter ist analog zu oben

$$|H/M| = [H : M] = \frac{|H|}{|M|} = \frac{21}{7} = 3$$

zyklisch, also abelsch, also auflösbar. Es folgt, daß bereits H auflösbar ist.
Betrachte nun den Fall, daß $|N| = 7$. Wieder ist N von Primzahlordnung, also zyklisch, also abelsch, und damit auflösbar. Wir müssen wieder zeigen, daß G/N auflösbar ist. Wie oben gilt nach Lagrange

$$|G/N| = [G : N] = \frac{|G|}{|N|} = \frac{105}{7} = 15.$$

Es ist zu zeigen, daß jede Gruppe H der Ordnung 15 auflösbar ist. Dies ist genau analog zum obigen Fall. Mit $15 = 3 \cdot 5$ sei s_3, bzw. s_5 die Anzahl der 3- bzw. 5-Sylowuntergruppen von H. Dann gilt $s_5 \big| 3$, also $s_5 \in \{1, 3\}$. Wegen $s_5 \equiv 1 \mod 5$ ist $s_5 = 1$. Da es also nur eine einzige 5-Sylowuntergruppe M gibt, ist diese Normalteiler. Außerdem ist sie zyklisch von Primzahlordnung, also abelsch und damit auflösbar (sogar nilpotent). Weiter ist analog zu oben

$$|H/M| = [H : M] = \frac{|H|}{|M|} = \frac{15}{5} = 3$$

zyklisch, also abelsch, also auflösbar. Es folgt, daß bereits H auflösbar ist.

Aufgabe 2 (Herbst 1986)**.** Sei p eine Primzahl und N der Normalisator einer p-Sylowgruppe der symmetrischen gruppe S_p. Zeigen Sie: $|N| = p(p-1)$.
HINWEIS: Zählen Sie die Elemente der Ordnung p von S_p.

Lösung. Es gilt $|S_p| = p! = p(p-1)!$. Da p prim ist, sind $(p-1)!$ und p relativ prim, also hat jede p-Sylowuntergruppe von S_p die Ordnung p.
Die Elemente der Ordnung p sind genau die p-Zykel. Jeder p-Zykel kann auf eindeutige Weise geschrieben werden als $(1a_2a_3\cdots a_p)$, wobei die a_i paarweise verschieden und außerdem verschieden von 1 sind. Man überlegt sich leicht, daß es $(p-1)!$ verschiedene Elemente dieser Art gibt.
Da Gruppen der Ordnung p zyklisch sind, sind die p-Sylowuntergruppen von S_p jeweils von einem p-Zykel erzeugt. Weiterhin enthält jede solche Gruppe $p-1$ verschiedene p-Zykel, die die gleiche Gruppe erzeugen. Die Anzahl s_p der p-Gruppen in S_p ist also $(p-1)! : (p-1) = (p-2)!$. (Genauer: je zwei p-Zykel sind zueinander konjugiert, wenn sie die gleiche p-Sylowgruppe erzeugen. Die Äquivalenzklassen haben Mächtigkeit $(p-1)$, also gibt es $(p-1)! : (p-1) = (p-2)!$ Äquivalenzklassen. Diese Zahl entspricht genau der Zahl der p-Sylowuntergruppen.)
Es gilt $[G : N] = s_p = (p-2)!$. Nach dem Satz von Lagrange ist also

$$|N| = |G| : [G : N] = p! : (p-2)! = p(p-1).$$

Aufgabe 3. Geben Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 2019 an.

Lösung. Die Primfaktorzerlegung von 2019 ist $2019 = 3 \cdot 673$. Weiter gilt $3|672 = (673-1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$.
Abelsche Gruppen: Nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen sind alle abelschen Gruppen der Ordnung 2019 isomorph zu

$$\mathbb{Z}/2019\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z}\,.$$

Nicht-abelsche Gruppen: Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z})^\times$ ist zyklisch von der Ordnung $673 - 1 = 672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$, also

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/672\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/32\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z}$$

Also hat $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z})$ genau eine Untergruppe der Ordnung 3. Sei also $\tau : \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z})$ ein nichttrivialer Homomorphismus, zum Beispiel gegeben durch $\overline{1} \mapsto (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0})$. Dann ist das semidirekte Produkt $\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z} \times_\tau \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z}$ eine nicht-abelsche Untergruppe der Ordnung 2019.
Wir zeigen, daß es bis auf Isomorphie die einzige nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2019 ist. Seien G, G' nicht abelsche Gruppen der Ordnung $2019 = 3 \cdot 673$. Untergruppen $Q \subset G$ und $Q' \subset G'$ der Ordnung 673 sind 673-Sylow-Untergruppen. Für die Anzahl s_{673} muß jeweils gelten $s_{673}|3$ und $s_{673} \equiv 1 \mod 673$. Also gibt es jeweils genau eine 673-Sylow-Untergruppe, und damit sind $Q \triangleleft G$, $Q' \triangleleft G'$ Normalteiler der Ordnung 673. Weiterhin sind Q und Q' zyklisch, also isomorph zu $\mathbb{Z}/673\,\mathbb{Z}$ mit Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}(Q)$ und $\mathrm{Aut}(Q')$ zyklisch von der Ordnung 672, also isomorph zu $\mathbb{Z}/672\,\mathbb{Z}$. Sei $g : Q \to Q'$ Isomorphismus. Er induziert einen Isomorphismus

$$\gamma : \mathrm{Aut}(Q) \to \mathrm{Aut}(Q'), \alpha \mapsto g \circ \alpha \circ g^{-1}$$

Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & Q' \arrow[d, "\gamma(\alpha)"'] \\ Q \arrow[r, "g"] & Q' \end{tikzcd}$$

Seien $P \subset G$, $P' \subset G'$ Untergruppen der Ordnung 3. Seien $\kappa : P \to \mathrm{Aut}(Q)$, $\kappa' : P' \to \mathrm{Aut}(Q')$ die Konjugationshomomorphismen. Diese sind injektiv.
Wie oben schon verwendet haben wegen $3\big|672$ die Gruppen $\mathrm{Aut}(Q)$ und $\mathrm{Aut}(Q')$ genau je eine Untergruppe der Ordnung 3. Da $\mathrm{im}(\kappa')$ und $\mathrm{im}(\gamma \circ \kappa)$ Untergruppen der Ordnung 3 von $\mathrm{Aut}(Q')$ sind, folgt

$$\mathrm{im}(\kappa') = \mathrm{im}(\gamma \circ \kappa).$$

Der Isomorphismus $f : P \to P'$ sei definiert durch $f = {\kappa'}^{-1} \circ \gamma \circ \kappa$; dann ist $\kappa' \circ f = \gamma \circ \kappa$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Aut}(Q) \arrow[d, "\gamma"] \\ P' \arrow[r, "\kappa'"] & \mathrm{Aut}(Q') \end{tikzcd}$$

Für $x \in P$ gilt

$$\gamma \circ \kappa(x) = g \circ \kappa(x) \circ g^{-1} = \kappa'(f(x))$$

also $g \circ \kappa(x) = \kappa'(f(x)) \circ g$. Sei $h : G \to G'$ definiert durch

$$h(yx) = g(y)f(x) \quad \text{für } y \in Q, x \in P.$$

Das ist wohldefiniert, und außerden Homomorphismus:

$$\begin{aligned}
h(y_1x_1y_2x_2) &= h(y_1x_1y_2x_1^{-1}x_1x_2)\\
&= g(y_1x_1y_2x_1^{-1})f(x_1x_2)\\
&= g(y_1)\,(g \circ \kappa(x_1))\,(y_2)f(x_1)f(x_2)\\
&= g(y_1)\,(\kappa'(f(x_1)) \circ g)\,(y_2)f(x_1)f(x_2)\\
&= g(y_1)\left(f(x_1)g(y_2)f(x_1)^{-1}\right)f(x_1)f(x_2)\\
&= g(y_1)f(x_1)g(y_2)f(x_2) = h(y_1x_1)h(y_2x_2)
\end{aligned}$$

Und damit ein Isomorphismus.

Aufgabe 4. Man zeige, daß keine Gruppe der Ordnung 200 einfach ist.

Lösung. Sei G eine Gruppe der Ordnung $200 = 2^3 5^2$. Sei s_5 die Anzahl der 5-Sylow-Untergruppen von G. Dann ist $s_5 \equiv 1 \mod 5$ und $s_5 | 2^3 = 8$. Also ist $s_5 = 1$ und G hat genau eine 5-Sylowuntergruppe. Insbesondere ist sie normal und G ist nicht einfach.

Aufgabe 5. Man zeige:

(a) Jede Untergruppe der $\mathfrak{S}_4$ ist genau zu einer der folgenden Gruppen isomorph:

$$\{e\}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad V \cong D_2, \quad S_3 \cong D_3, \quad D_4, \quad A_4, \quad \mathfrak{S}_4.$$

(b) Die einzigen Normalteiler von $\mathfrak{S}_4$ sind $\{e\}$, V, A_4, $\mathfrak{S}_4$.

Lösung. **Zu (a):** Diese Gruppen kommen vor. Sei umgekehrt $\{e\} \neq H \neq \mathfrak{S}_4$ Untergruppe. Dann gilt $|H| \in \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. Ist $|H| = 12$, dann ist $[\mathfrak{S}_4 : H] = 2$, also H Normalteiler vom Index 2, somit $H = A_4$. Ist $|H| = 8$, dann $H \cong D_4$, hiervon gibt es drei Stück. Ist $|H| = 6$, dann ist $H \cong \mathbb{Z}/6$, was aber unmöglich ist, oder $H \cong D_3$, hiervon gibt es 4 Stück. Ist $|H| = 4$, so ist $H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $H \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \cong V$. Ist $|H| = 3$, dann ist $H \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.Ist $|H| = 2$, dann ist $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Zu (b): Dies folgt aus (a).

Aufgabe 6. Sei G nilpotent, $\{e\} \neq N \triangleleft G$. Man zeige: $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.

Lösung. Sei $N_1 = N$, $N_{i+1} = [N_i, G]$ für $i \geqslant 1$. Es gilt $N_i \subset N$ da N Normalteiler ist, und $N_i \subset C^i(G)$, für $i \geqslant 1$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $C^n(G) = \{e\}$, also folgt $N_n = \{e\}$. Es gibt eine maximales $k \geqslant 1$ mit $N_k \neq \{e\}$. Dafür gilt $N_{k+1} = [N_k, G] = \{e\}$. Es folgt $\{e\} \neq N_k \subset Z(G) \cap N$.