Hinweis. Die Aufgaben sind aus Staatsexamina früherer Jahre entnommen. Die in Klammern angegebene Punktzahl ist die Punktzahl die damals erreicht werden konnte und ist nur zu Ihrer Orientierung angegeben.

Aufgabe 2.1 (F14T3A1)**.** Wir betrachten die komplexen Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $G = \{\pm E, \pm A, \pm B, \pm C\}$.

(a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. (5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G. (5 Punkte)

(c) Welche Untergruppen sind Normalteiler von G? (5 Punkte)

Aufgabe 2.2 (F12T2A1)**.** Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine **kurze** Begründung an:

(a) Die Gruppen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ sind isomorph.

(b) Die alternierende Gruppe A_4 ist eine einfache Gruppe.

(c) In der symmetrischen Gruppe S_5 sind alle Elemente der Ordnung 2 konjugiert.

(d) In $\mathbb{Z}[X]$ ist (X) ein Primideal.

(8 Punkte)

Aufgabe 2.3 (F06T2A3)**.** Zeigen Sie:

(a) Die additive Gruppe der reellen Zahlen ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen.

(b) Die additive Gruppe eines Körpers ist nie isomorph zur multiplikativen Gruppe dieses Körpers.

(5 Punkte)

Aufgabe 2.4 (F00T3A2)**.** Zeigen Sie, daß eine endliche Gruppe mit einem Normalteiler, dessen Ordnung gleich dem kleinsten Primteiler ihrer Ordnung ist, ein nichttriviales Zentrum hat.
Hinweis: Man betrachte die Operation der Gruppe auf dem Normalteiler durch Konjugation. (7 Punkte)

Aufgabe 2.5 (F14T2A3)**.** Sei G eine Gruppe. für $h \in G$ definieren wir den Gruppenautomorphismus

$$\varphi_h : G \to G, g \mapsto hgh^{-1}.$$

Die Automorphismen φ_h mit $h \in G$ nennt man *innere Automorphismen* von G. Wir definieren

$$\operatorname{Inn}(G) = \{\varphi_h \mid h \in G\} \subseteq \operatorname{Aut}(G)$$

und das Zentrum von G,

$$Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx \forall y \in G\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $\operatorname{Inn}(G)$ ein Normalteiler in $\operatorname{Aut}(G)$ ist. (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\varphi : G \to \operatorname{Inn}(G), h \mapsto \varphi_h$$

einen Gruppenisomorphismus $G/Z(G) \to \operatorname{Inn}(G)$ induziert. (4 Punkte)

(c) Beschrieben Sie alle Automorphismen der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ mit sieben Elementen und begründen Sie, weshalb in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ nur die Identität ein innerer Automorphismus ist. (6 Punkte)