Hinweis. Die Aufgaben sind aus Staatsexamina früherer Jahre entnommen. Die in Klammern angegebene Punktzahl ist die Punktzahl die damals erreicht werden konnte und ist nur zu Ihrer Orientierung angegeben.

Hinweis. Diese Woche gibt es sechs Aufgaben zur Auswahl. Aus Zeitgrfrm-eunden werden wir wahrscheinlich nur die Möglichkeit haben, fünf davon zu besprechen.

Aufgabe 5.1 (F15 T1A3)**.** Sei G eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:

(a) G hat einen Normalteiler N mit $|N| = 5$ oder $|N| = 7$. (6 Punkte)

(b) G ist auflösbar. (6 Punkte)

Aufgabe 5.2 (F15T1A1)**.** Sei $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit genau zwei Elementen 0 und 1. Auf dem dreidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$ betrachten wir den Endomorphismus

$$\phi : (\mathbb{F}_2)^3 \to (\mathbb{F}_2)^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von ϕ in $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von ϕ in $\mathbb{F}_2$ eine Basis des zugehörigen Eigenraumes. (8 Punkte)

(b) Gibt es eine Basis von $(\mathbb{F}_2)^3$, bezüglch derer ϕ eine Jordan'sche Normalform hat? Begrünten Sie Ihre Antwort. Wenn ja, bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von ϕ. (8 Punkte)

(9 Punkte)

Aufgabe 5.3 (F14T3A2)**.** Gegeben sei ein Element c aus einem kommutativen Ring R. Für $a, b \in R$ definieren wir $a \equiv b \mod c$ genau dann, wenn es ein $d \in R$ gibt mit $a - b = c \cdot d$.

(a) Zeigen Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation auf R definiert. (2 Punkte)

(b) Es sei nun $R = \mathbb{Z}$. Finden Sie alle Lösungen $y \in \mathbb{Z}$ der Kongruenz

$$51y \equiv 34 \mod 85$$

(5 Punkte)

(c) Es sei nun $R = \mathbb{Q}[X]$. Finden Sie alle Lösungen $f \in \mathbb{Q}[X]$ der simultanen Kongruenz

$$f \equiv 1 \mod (X^2 + 1) \quad \text{und} \quad f \equiv X \mod (X^2 - 1).$$

(5 Punkte)

(d) Es sei wieder $R = \mathbb{Z}$. Ist die Kongruenz $y^2 + 97y \equiv 3 \mod 101$ lösbar für $y \in \mathbb{Z}$? (3 Punkte)

Aufgabe 5.4 (H14T2A3)**.** (a) Es seien $p \geqslant 2$ eine natürliche Zahl, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \mathbb{N}_0$ $1 \leqslant i \leqslant m$, so daß

$$p^n = \sum_{i=1}^{m} p^{a_i}$$

gilt. Zeigen Sie, daß $m - 1$ durch $p - 1$ teilbar ist. (4 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie die Kongruenz modulo $p - 1$.

(b) Für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$ sei G eine Gruppe der Ordnung p^n, und

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}$$

sei das Zentrum von G. Zeigen Sie, daß die Anzahl der Konjugationsklassen von G, die nicht in $Z(G)$ liegen, durch $p - 1$ teilbar ist. (8 Punkte)

Aufgabe 5.5 (F15T3A3)**.** Ein Ring R mit Eins heißt *idempotent*, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt. Beweisen Sie:

(a) $-1 = 1$ in R. (4 Punkte)

(b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ. (4 Punkte)

(c) Jeder idempotente Integritätsbereich ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen. (4 Punkte)

Aufgabe 5.6 (F14T2A5)**.** Wir schreiben $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ für den Ring (unter paarweiser Addition und Multiplikation) und $\mathbb{R}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierteren reellen Funktionen.
Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ heißt *D-finit*, wenn der von f und allen Ableitungen $f', f'', \ldots$ erzeugte $\mathbb{R}$-Untervektorraum $D(f)$ von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ endlich-dimensional ist.
Zeigen Sie, daß die D-finiten Funktionen einen Unterring von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ bilden. (14 Punkte)