Lineare Algebra: kurze Wiederholung

Themen

Vektorräume (Unterräume)
Homomorphismen
Basis
Matrizen
Eigenwerte
Diagonalisierbarkeit (charakteristisches Polynom, Minimalpolynom)
Allgemeine und spezielle lineare Gruppe
Jordan Normalform
Satz von Cayley–Hamilton

Einige wichtige Konzepte

Vektorraum Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0)$ zusammen mit einer Abbildung $K \times V \to V, (a, v) \mapsto a.v$ so daß für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$ gilt

(1) $a.(v + w) = a.v + aw$

(2) $(a + b).v = a.v + b.v$

(3) $(a \cdot b).v = a.(b.v)$

(4) $1.v = v$

Jeder endliche Vektorraum ist isomorph zu K^n.

Unterraum Sei V ein K-Vektorraum. Ein Unterraum U von V ist eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq U \subset V$, so daß für alle $v, w \in U$ und $\lambda \in K$ gilt $v + w \in U$ und $\lambda.v \in U$.

Basis Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt Basis. Jeder Vektorraum hat eine Basis (mit Zorn'schem Lemma). Für $K = \mathbb{R}$ findet man mit dem Gram-Schmidt'sche Orthonormierungsverfahren sogar eine Orthonormalbasis.

Dimension Die Länge einer und damit jeder Basis heißt Dimension. Ist $\dim V < \infty$ und sind $V_1, V_2 \subset V$ Unterräume, dann gilt

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Homomorphismen Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen heißt Homomorphismus, falls für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$ gilt

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \text{und} \quad f(\alpha.v) = \alpha.f(v)$$

Ist f injektiv, so heißt es Monomorphismus, ist es surjektiv, so heißt es Epimorphismus, ist es bijektiv, so heißt es Isomorphismus. Ist $V = W$ so sprechen wir von einem Endomorphismus, und ist f zusätzlich bijektiv, so heißt es Automorphismus. Wählt man eine Basis, so kann man die darstellende Matrix eines Homomorphismus bezüglich dieser Basis angeben: seine $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ und $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ Basen, dann kann man schreiben $f(v_j) = \sum \alpha_{ij} w_j$ und setzt $(\alpha_{ij}) = A$. Es gilt $\mathrm{Hom}_K(V, W) \cong M_{m \times n}(K)$.

Eigenwerte, Eigenvektoren Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $\lambda \in K$ ist $E(\lambda) = \ker(f - \lambda \,\mathrm{id})$ der Eigenraum von f zu λ. Ist $E(\lambda) \neq 0$, so nennt man λ einen Eigenwert von f. Die Elemente aus $E(\lambda)$ heißen Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Ist f diagonalisierbar, so besitzt V eine Basis aus Eigenvktoren und umgekehrt. Die geometrische Vielfachheit von λ ist $\dim(E(\lambda)) = \dim V - \mathrm{rank}(f - \lambda \,\mathrm{id})$. Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

charakteristisches Polynom Das charakteristische Polynom ist $\chi_f(X) = \det(f - X \,\mathrm{id})$. Ist $\chi_f(\lambda) = 0$, so ist $E(\lambda) \neq 0$, also ist λ ein Eigenwert von f. Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Matrix (jeder Homomorphismus) Nullstelle ihres (seines) charakteristischen Polynoms.

Minimalpolynom Das Minimalpolynom $\mu_f(X)$ ist das normierte Polynom kleinsten Grades, so dass $\mu_f(f) = 0$, daher gilt $\mu_f \big| \chi_f$.

Jordan-Normalform Eine Matrix ist Trigonalisierbar, falls das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Insbesondere ist dies der Fall, wenn der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. In diesem Fall lässt sich eine Matrix in die sogenannte Jordan'sche Normalform bringen

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

wobei die J_i Jordanblöcke genannt werden. Sie haben auf der Diagonalen einen Eigenwert und auf der Nebendiagonalen 1.