Lineare Algebra: kurze Wiederholung

Wichtige Themen

Vektorräume (Unterräume)
Homomorphismen
Basis
Matrizen
Eigenwerte
Diagonalisierbarkeit (charakteristisches Polynom, Minimalpolynom)
Allgemeine und spezielle lineare Gruppe
Jordan Normalform
Satz von Cayley–Hamilton

Einige Aufgaben

Aufgabe 1. Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ mit $\lambda \neq 0$ gegeben. Man zeige, daß A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ die Jordan'sche Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ hat.

Beweis. Zunächst sei erwähnt, daß die Jordan'sche Normalform für A existiert, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Mit Induktion nach k zeigt man leicht, daß

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für das charakteristische Polynom von A^k

$$\chi_{A^k} = (X - \lambda^k)^2.$$

Die algebraische Vielfachheit ist 2. Da das Minimalpolynom einer Matrix das charakteristische Polynom teilt, gibt es für das Minimalpolynom von A^k die beiden Möglichkeiten

$$\mu_{A^k} = X - \lambda^k \qquad \text{oder} \qquad \mu_{A^k} = (X - \lambda^k)^2.$$

Im ersten Fall ergäbe sich die Jordan Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0\lambda^k & \end{pmatrix}$. Im zweiten Fall ergäbe sich die Jordan Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$.

Wir werden nun die geometrische Vielfachheit von A^k berechnen, um aus den obigen Möglichkeiten die richtige auszuwählen. Diese ist gegeben durch die Dimensionsformel:

$$\dim(\ker(A^k - \lambda^k E_2)) = \dim V - \operatorname{rank}(A^k - \lambda^k E_2) = 2 - 1 = 1.$$

Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit echt kleiner als die algebraische Vielfachheit. Da die geometrische Vielfachheit die Anzahl der Jordanblöcke angibt, wissen wir somit, daß die zweite Möglichkeit zutrifft und A^k die Jordan Normalform $\begin{pmatrix} \lambda^k & 1 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ hat. □

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum der Dimension n, und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus so daß das charackteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Alle Eigenräume von ϕ sind eindimensional.

(2) Zu jedem Eigenwert von ϕ existiert in der Jordan'schen Normalform genau ein Jordanblock.

(3) Das Minimalpolynom und das chrakteristische Polynom von ϕ stimme überein.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daßdie Jordan Normalform von ϕ existiert, da das charakteristiche Polynom von ϕ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\chi_\phi = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{k_i}$, wobei die $\alpha_i$paarweise verschieden sind und k_i die algebraische Vielfachheit von α_i ist und $\sum_{i=1}^r k_i = n$. Dann sind die α_i die Eigenwerte von ϕ.
(1) ⇒ (2): Für α_i ist der Eigenraum gegeben durch

$$E(\alpha_i) = \ker(\phi - \alpha_i \operatorname{id}_V).$$

Angenommen $\dim E(\alpha_i) = 1$, dann ist

$$1 = \dim E(\alpha_i) = \dim v - \dim(\operatorname{im}(\phi - \alpha_i \operatorname{id})) = \dim V - \operatorname{rank}(\phi - \alpha_i \operatorname{id})$$

Also ist $\operatorname{rank}(\phi - \alpha_i \operatorname{id}) = n - 1$, und esgibt genau ein Jordan Kästchen zu α_i. Kürzer könnte man sagen, daß die geometrische Vielfachheit $\dim E(\alpha_i)$ genau die Anzahl der Jordan Kästchen angibt.
(2) ⇒ (3): Angenommen es existiert zu jedem Eigenwert α_i genau ein Jordan-Block. Um zu zeigen, daß das Minimalpolynom μ_ϕ und das charakteristische Polynom χ_μ übereinstimmen, erinnern wir uns zunächst daran, daß das Minimalpolynom das charakteristische Polynom in jedem Fall teilt, d.h. $\mu_\phi = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{l_i}$ mit $l_i \leqslant k_i$, wobei für $i \in \{1, \dots, r\}$ der Exponent l_i die Spaltenzahl (oder Zeilenzahl) des größten Jordan-Blocks zum Eigenwert α_i angibt, und der Exponent k_i die Gesamtspaltenzahl (oder Gesamtzeilenzahl) aller Jordan-Blöcke zum Eigenwert α_i angibt. Da es zu α_i genau einen Jordan-Block gibt, muß also $l_i = k_i$ sein. Es folgt $\mu_\phi = \chi_\phi$.
(3) ⇒ (1): Angenommen, das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ stimmen überein, mit obigen Bezeichnungen

$$\mu_\phi = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{l_i} = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{k_i} = \chi_\phi,$$

also ist $l_i = k_i$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Da l_i die Spaltenzahl des größten Jordan-Blocks zu α_i ist, und k_i die Gesamtspaltenzahl aller Jordan-Blöcke zu α_i, gibt es zu jedem α_i genau einen Jordan-Block. Also ist die geomerische VIelfachheit und damit die Dimension des Eigenraumes von α_i gleich eins. □

Aufgabe 3. Man gebe alle Lösungen X der Gleichung $X^7 = E_5$ in $\mathbf{GL}_5(\mathbb{Q})$ an.

Beweis. Wir betrachten das Polynom $X^7 - 1$ über $\mathbb{Q}$. Dieses hat die Zerlegung in irreduzible Faktoren

$$X^7 - 1 = (X - 1)(X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1),$$

wobei der erste Faktor trivialerweise irreduzibel ist, denn er ist normiert und linear. Der zweite Faktor ist irreduzibel modulo 2, also irreduzibel in $\mathbb{Z}$ und damit auch irreduzibel in $\mathbb{Q}$.
Sei $A \in \mathbf{GL}_5(\mathbb{Q})$ mit $A^7 = E_5$, also $A^7 - E_5 = 0$. Nach Definition teilt das Minimalpolynom μ_A von A das Polynom $X^7 - 1$. Da das Minimalpolynom einer Matrix aus $\mathbf{GL}_5(\mathbb{Q})$ höchstens Grad 5 hat, gilt also $\mu_A = X - 1$ und es folgt $A = E_5$. □

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $K^{n \times n}$ der K-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Ferner sei $\mathbf{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$.

(1) Sei $A \in K^{n \times n}$, und V der von den Matrizen $A^0, A^1, A^2, \dots$ erzeugte Untervektorraum von $K^{n \times n}$. Man zeige, daß $\dim v \leqslant n$ gilt.
Hinweis: Satz von Cayley–Hamilton.

(2) Sei K ein endlicher Körper. Man zeige, daß jedes Element aus $GL_n(K)$ höchstens die Ordnung $|K|^n - 1$ hat.
Hinweis: Für $A \in \mathbf{GL}_n(K)$ vergleiche man die von A erzeugte Untergruppe von $\mathbf{GL}_n(K)$ mt V.

Einige wichtige Konzepte

Vektorraum Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0)$ zusammen mit einer Abbildung $K \times V \to V, (a, v) \mapsto a.v$ so daß für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$ gilt

(1) $a.(v + w) = a.v + aw$

(2) $(a + b).v = a.v + b.v$

(3) $(a \cdot b).v = a.(b.v)$

(4) $1.v = v$

Jeder endliche Vektorraum ist isomorph zu K^n.

Unterraum Sei V ein K-Vektorraum. Ein Unterraum U von V ist eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq U \subset V$, so daß für alle $v, w \in U$ und $\lambda \in K$ gilt $v + w \in U$ und $\lambda.v \in U$.

Basis Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt Basis. Jeder Vektorraum hat eine Basis (mit Zorn'schem Lemma). Für $K = \mathbb{R}$ findet man mit dem Gram-Schmidt'sche Orthonormierungsverfahren sogar eine Orthonormalbasis.

Dimension Die Länge einer und damit jeder Basis heißt Dimension. Ist $\dim V < \infty$ und sind $V_1, V_2 \subset V$ Unterräume, dann gilt

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Homomorphismen Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen heißt Homomorphismus, falls für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$ gilt

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \quad \text{und} \quad f(\alpha.v) = \alpha.f(v)$$

Ist f injektiv, so heißt es Monomorphismus, ist es surjektiv, so heißt es Epimorphismus, ist es bijektiv, so heißt es Isomorphismus. Ist $V = W$ so sprechen wir von einem Endomorphismus, und ist f zusätzlich bijektiv, so heißt es Automorphismus. Wählt man eine Basis, so kann man die darstellende Matrix eines Homomorphismus bezüglich dieser Basis angeben: seine $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ und $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ Basen, dann kann man schreiben $f(v_j) = \sum \alpha_{ij} w_j$ und setzt $(\alpha_{ij}) = A$. Es gilt $\mathrm{Hom}_K(V, W) \cong M_{m \times n}(K)$.

Eigenwerte, Eigenvektoren Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $\lambda \in K$ ist $E(\lambda) = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id})$ der Eigenraum von f zu λ. Ist $E(\lambda) \neq 0$, so nennt man λ einen Eigenwert von f. Die Elemente aus $E(\lambda)$ heißen Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Ist f diagonalisierbar, so besitzt V eine Basis aus Eigenvktoren und umgekehrt. Die geometrische Vielfachheit von λ ist$\dim(E(\lambda)) = \dim V - \mathrm{rank}(f)$. Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

charakteristisches Polynom Das charakteristische Polynom ist $\chi_f(X) = \det(f - X\,\mathrm{id})$. Ist $\chi_f(\lambda) = 0$, so ist $E(\lambda) \neq 0$, also ist λ ein Eigenwert von f. Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist jede Matrix (jeder Homomorphismus) Nullstelle ihres (seines) charakteristischen Polynoms.

Minimalpolynom Das Minimalpolynom $\mu_f(X)$ ist das normierte Polynom kleinsten Grades, so dass $\mu_f(f) = 0$, daher gilt $\mu_f | \chi_f$.

Jordan-Normalform Eine Matrix ist Trigonalisierbar, falls das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Insbesondere ist dies der Fall, wenn der Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. In diesem Fall lässt sich eine Matrix in die sogenannte Jordan'sche Normalform bringen

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

wobei die J_i Jordanblöcke genannt werden. Sie haben auf der Diagonalen einen Eigenwert und auf der Nebendiagonalen 1.