Algebraische Strukturen

Halbgruppe

$(S, \cdot)$ erfüllt
— Assoziativität
Kann leer sein.
Beispiel: $\varnothing \neq H$ eine Menge mit Verknüpfung $x \cdot y := y$. Assoziativität ist leicht zu sehen:

$$x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = z = y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$$

Hier ist jedes Element linksneutral, aber keines rechtsneutral (außer H enthält nur ein Element).

Monoid

$(M, \cdot)$ erfüllt
— Assoziativität
— Neutrales Element (beidseitig)
Gibt es ein rechtsneutrales und ein linksneutrales Element, so stimmen diese überein:
Sei e_1 linksneutral und e_2 rechtneutral, so ist

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2.$$

Gruppe

$(G, \cdot)$ erfüllt
— Assoziativität
— Neutrales Element (beidseitig)
— Inverses Element (beidseitig)
Es genügt Vorauszusetzen, daß G ein linksneutrales Element hat, und das jedes Element ein linksinverses hat (oder daß G ein rechtsinverses Element hat und jedes Element ein rechtsinverses hat):

Sei $x \in G$ und $x' \in G$ linksinvers zu x, also $x'x = e$. Das Element xx' ist in G, hat also ein linksinverses z. Dann ist

$$x = (z(xx'))x = z(x(x'x)) = zxe$$

Wir multiplizieren von rechts mit x', und erhalten

$$xx' = (zxe)x' = z(xx') = e.$$

Also ist x' auch rechtsinverses von x.

Wir zeigen, daß e auch rechtsneutrales Element ist:
Für jedes $x \in G$, mit inversem x' ist

$$xe = x(x'x) = (xx')x = ex.$$

Abelsche Gruppe

$(G, \cdot)$ erfüllt
— Assoziativität
— Neutrales Element (beidseitig)
— Inverses Element (beidseitig)
— Kommutativität
Man schreibt dann oft $(G, +)$.

Halbring

$(R, +, \cdot)$ erfüllt

— $(G, +)$ ist eine kommutative Halbgruppe

— $(G, \cdot)$ ist eine Halbgruppe

— Distributivgesetze

Nicht notwendig eine Null oder Eins.

Hemiring

$(R, +, \cdot)$ erfüllt

— $(G, +)$ ist ein kommutatives Monoid

— $(G, \cdot)$ ist eine Halbgruppe

— Distributivgesetze

Bewertungshalbring

$(R, +, \cdot)$ erfüllt

— $(G, +)$ ist ein kommutatives Monoid

— $(G, \cdot)$ ist ein Monoid

— Distributivgesetze

Ring

$(R, +, \cdot)$ erfüllt

— $(G, +)$ ist eine kommutative Gruppe

— $(G, \cdot)$ ist eine Halbgruppe

— Distributivgesetze

Dies wird auch manchmal als Pseudoring oder nicht-unitärer Ring bezeichnet.

Ring mit Eins/ unitärer Ring

$(R, +, \cdot)$ erfüllt

— $(G, +)$ ist eine kommutative Gruppe

— $(G, \cdot)$ ist ein Monoid

— Distributivgesetze

Oft wird dies als Ring bezeichnet, oder als nicht-kommutativer Ring.

Kommutativer Ring mit Eins

$(R, +, \cdot)$ erfüllt

— $(G, +)$ ist eine kommutative Gruppe

— $(G, \cdot)$ ist ein kommutatives Monoid

— Distributivgesetz

Oft sagt man auch nur kommutativer Ring.

Schiefkörper

$(K, +, \cdot)$ erfüllt

— $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe

— $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe

— Distributivgesetze

Im Französischen ist dies ein Körper.

Körper

$(K, +, \cdot)$ erfüllt

- — $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe
- — $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe
- — Distributivgesetz