Der de Rham–Witt-Komplex

Vorlesungsreihe an der
Universität Freiburg

3.–5. Februar 2015

Zusammenfassung

Sei X ein Schema über einem Körper positiver Charakteristik $p > 0$. Der klassische p-typische de Rham–Witt-Komplex über X wurde von Luc Illusie [12] nach einem Vorschlag von Pierre Deligne [7] entwickelt. Unter anderem sollte er eine konkrete und intrinsische Berechnung der kristallinen Kohomologie ermöglichen, sowie fundamentale Fragen der arithmetischen Geometrie beantworten helfen. Mittlerweile gibt es mehrere unterschiedliche Konstruktionsweisen und Verallgemeinerungen des de Rham–Witt-Komplexes, wie zum Beispiel den große de Rham–Witt-Komplex von Lars Hesselholt und Ib Madsen [10] oder den relative de Rham–Witt-Komplex von Andreas Langer und Thomas Zink [13]. Wir erklären die universelle Konstruktion des de Rham–Witt-Komplexes nach Deligne–Illusie und besprechen den Vergleichssatz mit kristalliner Kohomologie, sowie einige grundlegende Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Idee des de Rham-Witt-Komplexes

Die Suche nach dem de Rham–Witt-Komplex kam im Rahmen der kristallinen Kohomologie auf. In der Tat liefert er eine Methode um diese Kohomologietheorie zu berechnen. Doch warum, so könnte man sich fragen, sollte man Witt-Vektoren, die an sich schon recht kompliziert sind mit de Rham-Komplexen zusammenbringen? Diese Frage stellt auch Chambert-Loir und beantwortet sie folgendermaßen [3]. Zunächst um, wie schon erwähnt, konkrete Berechnungen der kristallinen Kohomologie anzustellen. Dies geschieht allerdings zu Lasten einer gewissen Funktorialität. Jedoch zwischen beiden Methoden hin und verwechseln zu können erlaubt, Vorteile aus beiden Methoden zu ziehen. Andererseits war es immer ein Anliegen, Kohomologietheorien miteinander zu vergleichen, konkret in diesem Fall kristalline Kohomologie mit anderen p-adischen Kohomologietheorien. Zum Beispiel hat man eine natürliche Abbildung von kristalliner Kohomologie zu algebraischer de Rham-Kohomologie, und modulo p stimmen diese überein. Gibt es ein Analogen für Hodge-Kohomologie? Kann man étale und kristalline Kohomologie, bzw. den Teil auf dem der Frobenius ein Automorphismus ist miteinander in Verbindung setzten? Oder mit der Serre-Kohomologie? Diese Fragen versuchte Bloch zunächst mit einem Komplex anzugehen, der K-Theorie verwendete, jedoch unter einigen Voraussetzungen. Später entwickelten dann Deligne und Illusie den de Rham–Witt-Komplex, wie wir ihn heute kennen.

Der de Rham–Witt-Komplex war ursprünglich definiert als Komplex von Garben auf einem Schema über einem perfekten Körper von Charakteristik $p > 0$. Allgemeiner kann er auch auf einem Schema über einer $\mathbb{Z}_{(p)}$-Algebra definiert werden. Er ist explizit und berechenbar – wenn auch die Berechnung zum Teil sehr involviert und komplex wird. Um genau zu sein, handelt es sich eigentlich um ein Prosystem (oder inversen Limes) von graduierten Differentialalgebren, das im Grad 0 den Witt-Vektoren entspricht und modulo p dem de Rham-Komplex.

Überblick

Wir beginnen mit einer Einleitung zu Witt-Vektoren, zunächst mit Schwerpunkt auf den klassischen p-typischen Witt-Vektoren von Teichmüller und Witt [16]. Eine gute Einführung findet man auch in Serres „Corps locaux “[15]. Eventuell wird die Verallgemeinerung Cartiers auf die großen Witt-Vektoren erwähnt [2] (siehe auch [14], bzw. Lars Hesselholts Vorlesungsskript [9]).

Hiervon ausgehend, können zwei äquivalente Definitionen des de Rham–Witt-Komplexes mittels universellen Eigenschaften gegeben werden, nämlich als initiales Objekt in der Kategorie der V-Prokomplexe oder als initiales Objekt in der Kategorie der Witt-Komplexe. Die Existenz dieser initialen Objekte kann mithilfe von Freyds Satz über adjungierte Funktoren bewiesen werden [11]. Es gibt jedoch einen konstruktiven Existenzbeweis in der Kategorie der V-Prokomplexe, der hier erläutert werden soll. Historisch wurde zuerst dieser Beweis gegeben und dann gezeigt, dass das resultierende Objekt eine Frobeniusabbildung besitzt.

Der Schwerpunkt des zweiten Teiles der Reihe liegt auf dem Vergleichssatz zwischen der kristallinen Kohomologie und der Hyperkohomologie des de Rham–Witt-Komplexes. Hierzu wird falls gewünscht die kristalline Kohomologie in groben Zügen wiederholt (siehe [1]). Der Beweis folgt Illusie [12]. Eine sehr schöne Beweisskizze findet man auch in dem Survey von Antoine Chambert-Loir [3].

Im dritten Teil sollen wichtige Eigenschaften des de Rham–Witt-Komplexes im Mittelpunkt stehen, wie zum Beispiel Endlichkeitsresultate. Je nach Interesse der Zuhörer können Beispiele oder weiterführende bzw. verallgemeinernde Konstruktionen besprochen werden. Anmerkungen, Vorschläge und Wünsche sind wie immer willkommen. Ich behalte es mir vor, das vorgeschlagene Programm, situationsbedingt noch kurzfristig zu ändern.

1 Witt-Vektoren

Witt-Vektoren, wurden ursprünglich von Ernst Witt [16] als eine Verallgemeinerung der p-adischen Zahlen entwickelt. Die p-typische Version tritt oft in gemischter Charakteristik und bei Liftungsproblemen auf. Sie zeichnen sich durch verschiedene universelle Eigenschaften aus, je nachdem, von welchem Blickwinkel man sie betrachtet. Daneben gibt es als weitere Verallgemeinerung die großen Witt-Vektoren, aus denen man die p-typischen Witt-Vektoren für jde Primzahl p ableiten kann.

1.1 p-typische Witt-Vektoren

Sei W ein Ring, und A von Charakteristik p. Dann ist W ein p-Ring mit Restklassenring A, falls es $\pi \in W$ gibt, so dass W für die π-adische Topologie separiert und vollständig ist, und $A = W/\pi W$ gilt. Insbesondere gilt $p \in \pi W$. Man sagt, W ist strikt, wenn $p = \pi$.

Wir betrachten nun den Fall, dass A ein perfekter Ring von Charakteristik $p > 0$ ist. In diesem Fall haben wir:

Satz 1.1. *Es gibt einen bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutigen strikten p-ring $W(A)$, genannt der Ring der Witt-Vektoren mit Koeffizienten in A, dessen Restklassenring A ist. Weiterhin hat man:*

1. *Es gibt ein eindeutiges System von Repräsentanten, $[-] : A \to W(A)$ genannt Teichmüller-Repräsentanten, und diese Abbildung ist multiplikativ*
$$[ab] = [a][b].$$
2. *Jedes Element $a \in W(A)$ hat eine eindeutige Darstellung als Summe*
$$\underline{a} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n] p^n$$
mit $a_n \in A$.
3. *Die Konstruktion von R und $[-]$ ist funktoriell in A, das heißt, ist $f : A \to A'$ ein Homomorphismus von perfekten Ringen der Charakteristik p, dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\tilde{f} : W(A) \to W(A')$, so dass die Diagramma*
$$\begin{tikzcd} W(A) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & W(A') \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$
und
$$\begin{tikzcd} W(A) \arrow[r, "\tilde{f}"] & W(A') \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[u, "{[]}"] & A' \arrow[u, "{[]}"] \end{tikzcd}$$
kommutieren.

Dieser Satz kann als abstrakte Tatsache bewiesen werden, ohne nützliche Konstruktion. Aber die strengen Eindeutigkeits- und Funktorialitätsforderungen sollten es möglich machen, $W(A)$ algebraisch zu konstruieren.

Als Menge ist er einfach $A^{\mathbb{N}}$. Genauer betrachtet man die sogenannte Geisterabbildung
$$w : W(A) \to A^{\mathbb{N}}$$
gegeben durch die Witt-Polynome
$$w_n(\underline{X}) = \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{p^{n-i}} \tag{1.1}$$
Jeder Witt-Vektor kann demanch geschrieben werden als Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, und die $w_n(a)$ heißen Geisterkomponenten. Der Menge $A^{\mathbb{N}}$ auf der rechten Seite von w wird nun eine komponentenweise Ringstruktur gegeben, und w bestimmt die entsprechende Ringstruktur auf $W(A)$. Genauer gesagt werde Summe und Produkt durch Polynome gegeben, die man rekursiv bestimmen kann. Für $a, b \in W(A)$
$$a + b = (S_0(a,b), S_1(a,b), \ldots, S_n(a,b), \ldots) \tag{1.2}$$
$$ab = (P_0(a,b), P_1(a,b), \ldots, P_n(a,b), \ldots) \tag{1.3}$$
Wenn man die Witt-Polynome betrachtet, muss man Gleichungen der Art
$$w_n(a) + w_n(b) = w_n(a+b)$$
lösen. Für $n = 0$ gilt zum Beispiel $w_0(\underline{X}) = X_0$, somit
$$a_0 + b_0 = S_0(a,b)$$

Das wird jedoch schnell komplizierter, je größer n wird. Für $n = 1$ bereits

$$S_1(a,b) = a_1 + b_1 + \sum_{0<i<p} p^{-1}\binom{p}{i} a_0^i b_0^{p-i}$$

Ähnlich löst man für die P_i Gleichungen $w_n(a)w_n(b) = w_n(ab)$, dann

$$\begin{aligned} P_0(a,b) &= a_0 b_0 \\ P_1(a,b) &= b_0^p a_1 + b_1 a_0^p + p a_1 b_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das dies wirklich möglich ist, folgt aus Dworks Lemma.

Lemma 1.2. *Sei A ein Ring und $x, y \in A$ so dass $x \cong y \mod pA$. Dann gilt für alle $i \geqslant 0$*

$$x^{p^i} \equiv y^{p^i} \mod p^{i+1}A$$

Beweis. Dies ist eine simple Anwendung der Binomialformel. □

Damit zeigte Dwork:

Korollar 1.3. *Angenommen es gibt einen Ringhomomorphismus $\phi : A \to A$, so dass $\phi(a) \equiv a^p \mod pA$. Dann ist $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ im Bild der Geisterabbildung $w : W(A) \to A^{\mathbb{N}}$ genau dann wenn $x_n \equiv \phi(x_{n-1}) \mod p^n A$.*

Man benutzt dies nun, um zu zeigen, dass für $a, b \in W(A)$ die Summe $w(a) + w(b)$ und das Produkt $w(a)w(b)$ wieder in $\mathrm{Im}(w)$ ist, das heißt es muss $s, p \in W(A)$ geben, so dass $w(s) = w(a) + w(b)$ und $w(p) = w(a)w(b)$. Man definiert so $a + b := s$ und $a \cdot b := p$. Insbesondere haben die oben rekusrsiv definierten Polynome S_i und P_i Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Man kann also die gesamte Konstruktion mit $A = \mathbb{Z}[\underline{X}]$ durchführen, und so größtmögliche Allgemeinheit erlangen, und dies so funktoriell auf nahezu beliebige Ringe forsetzen.

Das Einselement ist $1 = (1, 0, \ldots)$ (und $w(1, 0, \ldots) = (1, 1, 1, \ldots)$) und das Nullelement ist $0 = (0, 0, \ldots)$ (und $w(0, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$). Ist in A die Multiplikation mit p injektiv (oder bijektiv) so ist die Geisterabbildung w injektiv (bzw. bijektiv).

Die Teichmüller-Repräsentanten konstruiert man folgendermaßen. Man benötigt wieder Lemma 1.2:

Ist A ein Ring, so sei $\mathbb{R}(A)$ die Menge der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, so dass $x_{n+1}^p = x_n$. Sei A nun von Charakteristik p und W ein strikter p-Ring mit Restklassenring A.

Korollar 1.4. *Sei $x = (x_n) \in \mathbb{R}(A)$, und $\tilde{x}_n \in W$ ein Lift von x_n, dann konvergiert die Folge $(\tilde{x}_{n+m}^{p^m})_m$ in W zu einem Grenzwert $(\psi_A(x)_n$ der nur von x abhängt, und $\psi_A(x) := (\psi_A(x)_n)_n \in \mathbb{R}(W)$. Dies ist multiplikativ.*

Wenn A perfekt ist, so ist

$$\mathbb{R}(A) \to A, (x_n)_n \mapsto x_0$$

eine Bijektion und die Abbildung

$$A \to W, x \mapsto [x] = \psi_A(x)_0$$

ist multiplikativ, und das Bild in A is x.

Definition 1.5. Das Element $[x] \in A$ heißt Teichmüller-Repräsentant von x in W.

Es ist multiplikativ, wie wir gesehen haben, und ist dadurch ausgezeichnet, dass es $p$te Wurzeln besitzt. Es ist eine Tatsache aus der Theorie p-Ringe, dass man jedes Element in W als Summe

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} p^i [x_i]$$

darstellen kann.

Lemma 1.6. *Sei A ein perfekter Ring von Charakteristik p, und W wie oben. Die Abbildung*

$$f : W(A) \to W, (x_n) \mapsto \sum [x_n^{\frac{1}{p^n}}]p^n$$

ist ein Ringisomorphismus.

Beweis. Es ist klar, dass f eine wohldefinierte Bijektion ist, und dass $f(1) = 1$ und $f(0) = 0$. Durch Nachrechnen zeigt man nun, dass für $a, b \in W(A)$

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= f(S(a, b)) \\ f(a)f(b) &= f(P(a, b)) \end{aligned}$$

□

Dies zeigt, dass man mit $W(A)$ eine explizite Konstruktion des gewünschten Rings erhalten hat.

Beispiele 1.7. Man betrachtet oft den Fall, dass $A = k$ ein perfekter Körper von Charakteristik $p > 0$. Dann ist $W(k)$ ein vollständiger Bewertungsring mit maximalem Ideal (p). Insbesondere ist $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$.
Wenn A eine $\mathbb{Z}_{(p)}$-Algebra ist, trifft dies auch auf $W(A)$ zu.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Witt-Vektoren der Länge n, $W_n(A)$ als die Menge A^n mit Addition und Multiplikation gegeben durch die Polynome $S_0, \dots S_{n-1}$ und $P_0, \dots P_{n-1}$. Dies ist ein Quotient von $W(A)$ und insbesondere hat man

$$W_1(A) = A.$$

Für alle n hat die surjektive Restriktionsabbildung

$$R : W_{n+1}(A) \to W_n(A), \quad (a_0, \dots, a_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$$

mithilfe derer man $W(A)$ als projektiven Limes

$$W(A) = \varprojlim W_n(A)$$

darstellen kann. Dieses Konzept wird später noch eine Rolle spielen.

Weiterhin hat man eine additive Abbildung

$$V : W(A) \to W(A), \quad (a_o, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$$

genannt Verschiebung. Die Untergruppen $V^nW(A)$ definieren ein Filtration, bezüglich welcher $W(A)$ separiert und vollständig ist.

Die andere ausgezeichnete Abbildung ist der Frobenius, definiert für jeden beliebigen Ring A durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{F} & W(A) \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & A^{\mathbb{N}} \end{array}$$

wobei die untere horizontale Abbildung gegeben ist durch

$$(a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$$

Rekursiv kann man dann das Bild von F bestimmen.

Man hat $xV(y) = V(F(x)y)$, so dass $V : F_*W(A) \to W(A)$ ein $W(A)$-Modulhomomorphismus ist. Ferner gilt $FV = p$ immer, und wenn $p = 0$ in A auch $VF = p$.

Auf den endlichen Witt-Vektoren hat man in offensichtlicher Weise

$$\begin{aligned} V : W_n(A) &\to W_{n+1}(A) \\ F : W_{n+1}(A) &\to W_n(A) \end{aligned}$$

und in Charakteristik p wieder $RFV = FVR = p$.

Illusie zeigt [12], dass für eine $\mathbb{Z}_{(p)}$-Algebra A, das Ideal $V(W(A))$ eine PD-Struktur besitzt und F ein PD-Morphismus ist.

Der Witt-Funktor ist garbifizierbar. Sei X ein Schema. Dann definiert man eine Prägarbe

$$W(\mathscr{O}_X) : U \mapsto W(\mathscr{O}_X(U))$$

welche eine Garbe ist. Ebenso kann man die Abbildungen w, R, F, V garbifizieren. Man schreibt $(X, W(\mathscr{O}_X)) = W(X)$, das heißt der Unterliegende topologische Raum bleibt X.

1.2 Verallgemeinerungen

Die oben geschilderten Konstruktionen und Beweise lassen sich auf allgemeinere Indexmengen erweitern. Wir werden kurz auf die Aussagen eingehen, jedoch keine Beweise anführen. Details können nachgelesen werden bei [14, 8].

Definition 1.8. Eine Teilmenge $P \subset \mathbb{N}$ heißt teilerstabil, wenn $P \neq \emptyset$ und mit $n \in P$ sind auch alle Teiler von n in P enthalten. Sei $\mathscr{P}(P)$ die Menge der in p enthaltenen Primzahlen.

Bemerkung 1.9.

- Sei P teilerstabil, dann ist automatisch $1 \in P$.
- Wenn $n \in P$, dann sind auch alle Primteiler von n in P enthalten.
- Die multiplikativ abgeschlossene Menge, die von P erzeugt wird, ist die Menge aller endlichen Produkte von Elementen in $\mathscr{P}(P)$.

Beispiele 1.10. Die Menge $\mathbb{N}$ selbst ist teilerstabil, ebenso die endlichen Teilmengen $\{1, \ldots, n\}$. Für jede Primzahl p ist die Menge der Primzahlpotenzen $\{p^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ teilerstabil, sowie die endlichen Teilmengen $\{p^n \mid n \in \{0, \ldots, n\}\}$

Definition 1.11. Für $n \in \mathbb{N}$ ist das $n$te Wittpolynom

$$w_n = \sum_{d|n} dX_d^{\frac{n}{d}} \in \mathbb{Z}[X_d : d|n]$$

Wir definieren nun die Wittvektoren für eine teilerstabile Menge P.

Definition 1.12. Sei A ein beliebiger Ring. Der große Wittring

$$W_P(A)$$

ist die Menge A^P mit einer Ringstruktur gegeben durch die Geisterabbildung

$$\begin{aligned} w : W_P(A) &\to A^P && (1.4)\\ \underline{a} = (a_n)_{n\in P} &\mapsto (w_n(\underline{a}))_{n\in P} && (1.5)\end{aligned}$$

Genauer gesagt ist folgendes gemeint. Die Ringstruktur auf der rechten Seite der Geisterabbildiung ist punktweise definiert. Die Ringstruktur auf der linken Seite ist durch die Forderung definiert, dass die Geisterabbildung eine natürlich transformation von Funktoren auf der Kategorie der Ringe induziert. Man kann zeigen, dass die so gegebene Ringstruktur existiert und eindeutig ist. Hierzu benötigt man Dworks Lemma.

Lemma 1.13 (Dwork). *Für jede primzahl p existiere ein Ringhomomorphismus $\phi_p : A \to A$ mit $\phi_p(a) \cong a^p \mod pA$. Dann ist eine Folge $(x_n)_{n\in P}$ im Bild der Geisterabbildung (1.4) genau dann wenn $x_n \cong \phi_p(x_{\frac{n}{p}}) \mod p^{\nu_p(n)}$ für alle p und alle $n \in P$.*

Alle für den Beweis notwendigen Kongruenzen sind in diesem Lemma enthalten, und der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis kann relativ leicht daraus abgeleitet werden. Die Addition und Multiplikation ist durch Polynome S_n, M_n gegeben, die durch die Geisterabbildung rekursiv bestimmt werden können.

Wie schon bei den p-typischen Wittvektoren gibt es weitere Strukturen, die die Konstruktion besonders interessant machen.

Restriktionsabbildung Wenn $S \subset P$ zwei teilerstabile Mengen sind, ist die Restriktionsabbildung

$$R_S^P : W_P(A) \to W_S(A)$$

ein natürlicher Ringhomomorphismus.

Verschiebung Sei P eine teilerstabile Indexmenge. Dann ist $\frac{P}{n} = \{n \in \mathbb{N} \mid nd \in P\}$ ebenfalls teilerstabil. Die Verschiebungsabbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} V_n : W_{\frac{P}{n}}(A) &\to W_P(A) && (1.6)\\ V_n((a_d)_{d\in\frac{P}{n}})_m &= \begin{cases} a_d & \text{falls } m = nd\\ 0 & \text{andernfalls}\end{cases} && (1.7)\end{aligned}$$

Sie ist additiv, aber in der Regel nicht multiplikativ.

Frobenius Es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus, $F_n : W_P(A) \to W_P(A)$ so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W_P(A) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "F_n"] & A^P \arrow[d, "F_n^w"] \\ W_{\frac{P}{n}}(A) \arrow[r, "w"] & A^{\frac{P}{n}} \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $F_n^w(\underline{x})_d = x_{nd}$.

Teichmüllerlift Wie oben, gegeben durch die Abbildung

$$[-]_P : A \to W_P(A) \tag{1.8}$$

$$([a]_P)_n = \begin{cases} a & \text{falls } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.9}$$

Dies ist multiplikativ. Und wir können ihn nutzen, um Wittvektoren darzustellen: $a = \sum_{n \in P} V_n([a_n]_{\frac{P}{n}})$.

Relationen Es gelten folgende Relationen.

1. $F_n V_n(a) = na$
2. $aV_n(a') = V_n(F_n(a)a')$
3. $F_m V_n = V_n F_m$ falls $(n, m) = 1$

Man zeigt dies mittels der Geisterabbildung.

Beispiel 1.14. Es ist klar, dass man für $P = \{1, p, p^2, \ldots\}$ die p-typischen Witt-Vektoren von oben erhält. Weiterhin erhält man für ein endliche Indexmenge, endliche Witt-Vektoren.

Weitere Verallgemeinerungen sind zum Beispiel Witt-Burnside-Ringe.

2 Existenz und Konstruktion des de Rham–Witt-Komplex

Sei k ein perfekter Körper von Charakteristik p und X/k ein (glattes) Schema. Man will nun einen De Rham-artigen Komplex konstruieren, der die kristalline Kohomologie von X berechnet, gewisse universelle Eigenschaften besitzt und über gewisse zusätzliche Strukturen verfügt. Anknüpfend an die Witt-Vektoren, will man das zugehörige Prosystem auf einen Komplex erweitern.

2.1 de Rham–Komplexe

Diese Idee ist nicht neu. Erinnern wir uns, dass für einen Ringhomomorphismus $R \to A$ der Modul der Kähler-Differenziale $\Omega^1_{A/R}$ das initial Objekt in der Kategorie der A-Moduln mit R-Derivation (M, δ) ist (in anderen Worten, er repräsentiert den Funktor $\mathbf{Der}_R(A, -) : \mathrm{Mod}(A) \to \mathcal{S}et$, der einem Modul M die Menge der R-Derivationen $A \to M$ zuordnet). Die Morphismen in dieser Kategorie sind A-Modulhomomorphismen, die mit den Derivationen verträglich sind. Setzt man dies auf die äußere Algebra von $\Omega^1_{A/R}$, so erhält man eine strikt antikommutative differentiell graduierte R-Algebra

$$(\Omega^\bullet_{A/R}, d_A) := \left[0 \to A \xrightarrow{d_A} \Omega^1_{A/R} \to \cdots\right].$$

Diese Konstruktionen sind kovariant in R bzw. A, und lassen sich Garbifizieren, wobei man die algebraische de Rham-Kohomologie erhält. Gros zeigte, dass für einen glatten Morphismus $f : X \to S$ von Schemata die Hyperkohomologie des algebraischen se Rham-Komplexes $\Omega^\bullet_{X/S}$ die Kohomologie des infinitesimalen Situs $(X/S)_{\mathrm{inf}}$ (das heißt die Garbenkohomologie der entsprechenden Strukturgarbe) berechnet.

Nun kann man den kristallinen Situs als Analogen des infinitesimalen Situs in Charakteristik $p > 0$ sehen, wonach die kristalline Kohomologie der infinitesimalen Kohomologie entspricht. Demanch ist das Ziel, einen Komplex zu konstruieren, der dem algebraischen de Rham-Komplex in obiger Situation entspricht, das heißt, dessen Hyperkohomologie für ein glattes Schema über einer perfekten Basis von

Charakteristik p die kristalline Kohomologie dieses Schemas berechnet, mit einer ähnlichen universellen Eigenschaft wie oben, der zusätzliche Strukturen erlaubt.

Folgende universelle Eigenschaft des de Rham-Komplex wird einen Hinweis liefern, wie man dazu vorzugehen hat.

Proposition 2.1. *Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $\mathrm{dg}\,\mathcal{Alg}^{\geqslant 0}(R)$ die Kategorie nicht negativ differentiell graduierter R-Algebren. Der Funktor*

$$\begin{aligned} \mathcal{Alg}(R) &\to \mathrm{dg}\,\mathcal{Alg}^{\geqslant 0}(R) && (2.1)\\ A &\mapsto \Omega^\bullet_{A/R} && (2.2)\end{aligned}$$

ist linksadjungiert zu dem Vergissfunktor,

$$\begin{aligned} \mathrm{dg}\,\mathcal{Alg}(R)^{\geqslant 0} &\to \mathcal{Alg}(R) && (2.3)\\ \{f : (B^\bullet, d_B) \to (C^\bullet, d_C)\} &\mapsto \{f : B^0 \to C^0\} && (2.4)\end{aligned}$$

Somit sollte der de Rham–Witt-Komplex eine differentiell graduierte Algebra mit analogen universellen Eigenschaften sein in einer entsprechenden Kategorie von differentiell graduierten Algebren über den Witt-Vektoren. Jedoch muss man, um die gewünechten Strukturen zu erhalten ein bißchen vorsichtig sein, und kann nicht direkt über dem Ring der Witt-Vektoren arbeiten – sondern muss man wie bei der Konstruktion der Witt-Vektoren selbst mit Prosystemen arbeiten.

Das erste, was wir über Charakteristik $p > 0$ beachten müssen, sind PD-Strukturen. Diese tauchen bereits in der kristallinen Kohomologie auf, denn um integrieren zu können, muss man Potenzen durch bestimmte ganze Zahlen teilen können (das kann man sich leich an elementaren Beispielen klar machen).

Eine PD-Struktur auf einer R-Algebra A ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ zusammen mit einer Abbildung $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathfrak{a} \to A$, so dass formell "$\gamma_n(x) = \frac{x^n}{n!}$" in Situationen, wo dies nicht definiert ist. Um dies bei der Konstruktion des de Rham-Komplexes zu berücksichtigen betrachtet man das Ideal, des graduierten Rings $\Omega^\bullet_{A/R}$ erzeugt von

$$\left\{ d_A(\gamma_n(x)) - \gamma_{n-1}(x) d_A(x) \quad \middle| \quad x \in \mathfrak{a}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Der Quotient des ursprüngleichen Komplexes durch dieses Ideal ist wieder eine differenziell graduierte R-Algebra nun aber mit PD-Struktur, wobei γ und d_A kompatibel sind, die de Rham-PD-Komplex genannt wird, geschrieben $\Omega^\bullet_{A/R,\gamma}$. Illusie in [12] zeigt nun folgende Variante obiger Proposition.

Proposition 2.2. *Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Der Funktor*

$$\begin{aligned} PD\,\mathcal{Alg}(R) &\to PD\,\mathrm{dg}\,\mathcal{Alg}^{\geqslant 0}(R) && (2.5)\\ (A, \mathfrak{a}, \gamma) &\mapsto \Omega^\bullet_{A/R,\gamma} && (2.6)\end{aligned}$$

ist linksadjungiert zu dem Vergissfunktor,

$$\begin{aligned} PD\,\mathrm{dg}\,\mathcal{Alg}(R)^{\geqslant 0} &\to PD\,\mathcal{Alg}(R) && (2.7)\\ \{f : (B^\bullet, d_B) \to (C^\bullet, d_C)\} &\mapsto \{f : B^0 \to C^0\} && (2.8)\end{aligned}$$

Diese Objekt werden wir vor allem bei dem Vergleich zwischen kristalliner Kohomologie und dem de Rham–Witt-Komplex benötigen.

2.2 de Rham-V-Prokomplexe

Man könnte nun Versuchen den de Rham-Komplex von $W(X)$ zu betrachten und dessen Hyperkohomologie betrachten, doch dies ist nicht kompatibel mit dem Prosytem, bzw. dem Limes in der Konstruktion der Witt-Vektoren. Andererseits könnte man für jedes n den de Rham-Komplex $\Omega^\bullet_{W_n(\mathscr{O}_X)/k}$ betrachten, und dann den Limes nehmen. Dies ist jedoch nicht verträglich mit Frobenius und Verschiebung – und wir würden gern möglichst viel Struktur von den Witt-Vektoren auch für die Kohomologie übernehmen. In der Hoffnung ein universelles Objekt wie oben zu erhalten, formulieren wir zunächst präzise, was für Eigenschaften wir gerne hätten.

Nämlich ein projektives System $W_\bullet\Omega^\bullet_X$ mit

1. es erweitert das Projektile System $W_\bullet\,\mathscr{O}_X$, d.h.

$$W_\bullet\Omega^0_X = W_\bullet\,\mathscr{O}_X$$

2. Operatoren $F : W_n\Omega^i_X \to W_{n-1}\Omega^i_X$ und $V : W_{n-1}\Omega^i_X \to W_n\Omega^i_X$ die Frobenius und Verschiebung von den Witt-Vektoren erweitern mit den Relationen
   (a) Frobenius und Verschiebung kommutieren: $FV = VF = p$, Die Relationen mit dem Differential sind: $FdV = d$, $Fd[x] = [x]^{p-1}d[x]$ f/ür $x \in \mathscr{O}_X$.
   (b) Der Frobenius ist multiplikative: $Fx.Fy = F(xy)$, und $xVy = V(Fx.y)$, in beiden Fällen $x, y \in W_\bullet\, \mathscr{O}_X$.
   (c) $V(xdy) = Vx.dVy$ für $x, y \in W_\bullet\, \mathscr{O}_X$.
3. es sollte kanonisch und funktoriell in X sein.
4. es sollte universell in einem gewissen Sinn sein.

Es stellt sich nun heraus, dass man zunächst den Fobenius außen vor lassen kann. Man konstruiert als Lösung eines universellen Problems ein projetives System differentiell graduierter Algebren $W_\bullet\Omega^\bullet_X$ zusammen mit Erweiterungen V von $W_\bullet\, \mathscr{O}_X$ auf $W_\bullet\Omega^\bullet_X$, die eine Formel erfüllen, die sich aus den oben genannten Relationen ableitet. Die Konstruktion ist eher einfach, und im Wesentlichen eindeutig. Es ist weit weniger klar, dass sich darauf der Frobenius erweitern lässt.

Definition 2.3. Sei X ein Schema. Ein de Rham V-Prokomplex auf X ist

1. ein projektives System $M_\bullet := ((M_n, d_n), R : M_{n+1} \to M_n)$ von nicht negativ differentiell gradiuerten $\mathbb{Z}$-Algebren auf X_{Zar}.
2. eine Familie von additiven Abbildungen $(V : M^i_n \to M^i_{n+1})_{i,n\in\mathbb{Z}}$ mit $RV = VR$ und den Folgenden Bedingungen:

   (V1) $M_{n\leqslant 0} = 0$, und M^0_1 ist eine $\mathbb{F}_p$-Algebra, und für alle $n \geqslant 1$ $M^0_n = W_n(M^0_1)$ wobei R und V der üblichen Projektion und Verschiebung der Witt-Vektoren entsprechen.

   (V2) Für alle n, i, j, und $x \in M^i_n$, $y \in M^j_n$, gilt
$$V(xdy) = (Vx)dVy.$$

   (V3) Für $n \in \mathbb{N}$, und $x \in M^0_1$, $y \in M^0_n$ gilt
$$(Vy)d[x] = V([x]^{p-1}y)dV[x]$$

Morphismen von de Rham-V-Prokomplexen $f : M_\bullet \to N_\bullet$ sind Morphismen von projektiven Systeme von differentiell graduierten Algebren, die mit der Abbildung V kompatibel sind. Damit bilden die de Rham-V-Prokomplexe auf X eine Kategorie $\mathrm{VDR}(X)$. Wie im Fall der üblichen de Rham-Komplexe gibt es einen natürlichen Vergissfunktor
$$\mathrm{VDR}(X) \to \mathbb{F}_p\,\mathcal{Alg}(X) \quad , \quad M_\bullet \mapsto M^0_1, \tag{2.9}$$
wo $\mathbb{F}_p\,\mathcal{Alg}(X)$ die Kategorie der $\mathbb{F}_p$-Algebren über X bezeichnet.

Satz 2.4. *Sei X ein Schema.*

1. *Der Vergissfunktor (2.9) hat ein Linksadjungiertes*
$$W_\bullet\Omega^\bullet : A \mapsto W_\bullet\Omega^\bullet_A,$$
das heißt, man hat einen funktoriellen Isomorphismus
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{VDR}(X)}(W_\bullet\Omega^\bullet_A, M_\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p\,\mathcal{Alg}(X)}(A, M^0_1) \tag{2.10}$$
2. *Für alle $\mathbb{F}_p$-Algebren A und $n \in \mathbb{N}$ ist die kanonische Abbildung von differentiell graduierten Algebre*
$$\pi_n : \Omega^\bullet_{W_n(A)} \to W_n\Omega^\bullet_A$$
surjektiv, wobei $\pi^0_n = \mathrm{id}$ und $\pi_1 : \Omega^\bullet_A \to W_1\Omega^\bullet_A$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Man kann dies sehr formal mit Freyd's Satz über adjungierte Funktoren zeigen. Es ist klar, dass der Vergissfunktor kleine Limiten erhält. Nicht-trivial ist es, die Lösungsmengenbedingung (solution set condition) nachzuprüfen. Doch da dies ohnehin für praktische Zwecke nicht viel Bedeutug hat, werden wir gleich in den kontruktiven Beweis einsteigen, der von Illusie gegeben wurde.

Wir wollen Objekte $W_n\Omega^i : A$ konstruieren, wobei n der Index des projektiven Systems, und i der Grad des Komplexes ist. Die Konstruktion erfolgt mittel Induktion nach n. Es ist klar, was wir für $n \leqslant 0$ wählen müssen: $W_n\Omega^\bullet_A = 0$. Ebenso für $n = 1$: $W_1\Omega^\bullet_A = \Omega^\bullet_A$.

Nehmen wir also an, dass für $n \in \mathbb{N}$ das projektive System $(W_i\Omega^\bullet_A)_{i\leqslant n}$ mit R und V entsprechend konstruiert sind. Ferner seinen die gewünschten Bedingungen erfüllt für $i \leqslant n$:

$(0)_n$ $RVx = VRx$ für alle $x \in W_i\Omega^\bullet_A$, $i \leqslant n-1$

$(1)_n$ $W_i\Omega^0_A = W_i(A)$ für $i \leqslant n$ und R und V sind die gewöhnliche Verschiebung und Projektion.

$(2)_n$ $V(xdy) = (Vx)dVy$ für $x, y \in W_i\Omega^\bullet_A$, $i \leqslant n-1$

$(3)_n$ $(Vy)d[x] = V([x]^{p-1}y)dV[x]$ für $x \in A$, $y \in W_i(A)$, $i \leqslant n-1$.

$(4)_n$ $\pi_i : \Omega^\bullet_{W_i(A)} \to W_i\Omega^\bullet$, $i \leqslant n$ ist surjektiv.

Wir werden nun $W_{n+1}\Omega^\bullet_A$ zusammen mit $R : W_{n+1}\Omega^\bullet_A \to W_n\Omega^\bullet_A$ und $V : W_n\Omega^\bullet_A \to W_{n+1}\Omega^\bullet_A$ konstruieren, mit den Bedingungn $(0)_{n+1}$ bis $(4)_{n+1}$.

Es wird ein Quotient von $\Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)}$ sein. Betrachte die Homomorphismen

$$v : W_n(A)^{\otimes i+1} \to \Omega^i_{W_{n+1}(A)} \quad , \quad a \otimes x_1 \ldots \otimes x_i \mapsto VadVx_1 \ldots dVx_i$$

und

$$\varepsilon : W_n(A)^{\otimes i+1} \to \Omega^i_{W_n(A)} \quad , \quad a \otimes x_1 \ldots \otimes x_i \mapsto adx_1 \ldots dx_i$$

und den Kern K^i der Abbildung $W_n(A)^{\otimes i+1} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega^i_{W_n(A)} \xrightarrow{\pi_n} W_n\Omega^i_A$. Durch Nachrechnen ist leicht zu sehen, dass $\bigoplus_i v(K^i)$ ein graduiertes Ideal in $\Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)}$ ist (jedoch nicht stabil unter d im Allgemeinen). Dises Ideal herauszuteilen bereitet die Konstruktion von V vor. Nun müssen wir noch die gewünschten Relationen herausteilen. Sei darum I der $W_{n+1}(A)$-Untermodul von $\Omega^1_{W_{n+1}(A)}$, der von Schnitten der Form $Vy.d[x] - V([x]^{p-1}y)dV[x]$ für $x \in A$ und $y \in W_n(A)$ erzeugt wird. Sei nun N das differentiell graduierte Ideal von $\Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)}$ das von I und $\bigoplus_i v(K^i)$ erzeugt wird. Setze also

$$W_{n+1}\Omega^\bullet_A := \Omega_{W_{n+1}(A)}/N.$$

Nun zur Konstruktion von R. Da $W_{n+1}\Omega^\bullet_A$ als Quotient von $\Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)}$ definiert wurde, liegt es nahe, die Projektion $R : W_{n+1}(A) \to W_n(A)$ funktoriell zu einem Morphismus von differentiell graduierten Algebren $R : \Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)} \to \Omega^\bullet_{W_n(A)}$ zu erweitern, und dann zu zeigen, dass er einen Morphismus uaf den Quotienten definiert

$$\begin{tikzcd}
\Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\pi_{n+1}"'] & \Omega^\bullet_{W_n(A)} \arrow[d, "\pi_n"] \\
W_{n+1}\Omega^\bullet_A \arrow[r, dotted, "R"] & W_n\Omega^\bullet_A
\end{tikzcd}$$

Genauer gesagt muss man zeigen, dass $\pi_n R(N) = 0$, was eine einfache Rechnung ist.

Für die Konstruktion von V betrachtet man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W_n(A)^{\otimes i+1} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \Omega^{i+1}_{W_{n+1}(A)} \arrow[dd, "\pi_{n+1}"] \\
\Omega^i_{W_n(A)} \arrow[d, "\pi_n"'] & \\
W_n\Omega^i_A \arrow[r, dotted, "V"'] & W_{n+1}\Omega^i_A
\end{tikzcd}$$

und wir sehen, dass es kommutiert, dass nach Konstruktion $\pi_{n+1}v(K^i) = 0$, und dass V additiv ist.

Nach Kontruktion sind die Bedingungen $(0)_{n+1}$ bis $(4)_{n+1}$ erfüllt.

Nun muss man noch zeigen, dass das erhaltene Prosystem $W_\bullet\Omega_A^\bullet$ universell ist, dass heißt (2.10) gilt. Dies erfolgt wieerum induktiv. Sei $M_\bullet$ ein weiterer de Rham-V-Prokomplex, und $f_1^0 : A \to M_1^0$ ein Homomorphismus. Da $W_1\Omega_A^\bullet$ ein de Rham-Komplex ist und M_1 differentiell graduiert, erweitern wir f_1^0 funktoriell zu $f_1 : W_1\Omega_A^\bullet \to M_1$. Nach Induktionsannahme, sei f_1 erweitert zu

$$f_i : W_i\Omega_A^\bullet \to M_i$$

für $i \leqslant n$, so dass $f_{i-1}R = Rf_i$, $Vf_{i-1} = f_iV$ und $f_i^0 = W_i(f_1^0)$. Definiere $f_{n+1}^0 = W_{n+1}(f_1^0) : W_{n+1}(A) \to M_{n+1}^0$ und lifte funktoriell zu $g_{n+1} : \Omega^\bullet_{W_{n+1}(A)} \to M_{n+1}$ wie vorher auch schon. Da $g_{n+1}(N) = 0$ faktorisiert dies durch den Quotienten $W_{n+1}\Omega_A^\bullet$ und definiert eine Abbildung

$$f_{n+1} : W_{n+1}\Omega_A^\bullet \to M_{n+1}$$

kompatibel mit Projektion R und Verschiebung V.

Der Rest der Aussage des Satzes folgt klar aus der Konstruktion. □

Definition 2.5. Sei A eine $\mathbb{F}_p$-Algebra. Der de Rham-V-Prokomplex $W_\bullet\Omega_A^\bullet$ heißt de Rham–Witt-Prokomplex von A.

2.3 Einige Eigenschaften

Weitere Relationen

Proposition 2.6. *Sei A eine $\mathbb{F}_p$-Algebra.*

1. *Für $x \in W_n(A)$, $y \in W_{n-1}\Omega_A^i$ gilt $xVy = V(FRx.y)$.*
2. *Für $x \in A$, $y \in W_{n-1}\Omega_A^i$ gilt $(d[x])Vy = V(([x]^{p-1}d[x])y)$.*

Realtiver Komplex über einem perfekten Körper von Charakteristik $p \neq 0$

Nach Definition ist $W_\bullet\Omega^\bullet$ ein Funktor auf $\mathbb{F}_p$-Algebren, insbesondere definiert jeder $\mathbb{F}_p$-Algebrenmorphismus

$$f : A \to B$$

einen Morphismus in $\mathrm{VDR}(X)$

$$W_\bullet\Omega^\bullet(f) : W_\bullet\Omega_A^\bullet \to W_\bullet\Omega_B^\bullet$$

Sei k eine perfekte $\mathbb{F}_p$-Algebra und $k \to A$ eine k-Algebra. Damit haben wir eine Abbildung

$$W_\bullet\Omega_k^\bullet \to W_\bullet\Omega_A^\bullet.$$

Man kann zeigen (wir werden dies in Abschnitt 4.1 sehen) dass für eine perfekte $\mathbb{F}_p$-Algebra A gilt $W_\bullet\Omega_A^i = 0$ für $i \neq 0$. Insbesondere gilt dies für einen perfekten Körper k von Charakteristik $p \neq 0$. Das heißt obiger Morphismus entartet zu

$$W_\bullet(k) \to W_\bullet\Omega_A^\bullet$$

und $W_n\Omega_A^\bullet$ ist auf natürlcihe Weise eine $W_n(k)$-Algebra, insbesondere ist das differential d $W_n(k)$-linear, und damit auch k-linear, und es macht Sinn den relativen de Rham–Witt-Komplex

$$W_\bullet\Omega_{A/k}^\bullet$$

betrachten

Basiswechsel

Sei $k \to k'$ ein Morphismus von perfekten $\mathbb{F}_p$-Algebren, A eine k-Algebra und $A' = A \otimes_k k'$. Aus den Erläuterungen des vorigen Paragraphs folgt, dass man einen Morphismus von projektiven Systemen von differentiell graduierten Algebren erhält

$$W_\bullet \Omega^\bullet_A \otimes_{W_\bullet(k)} W_\bullet(k') \to W_\bullet \Omega^\bullet_{A'}$$

Proposition 2.7. *Dies ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Da k' perfekt ist, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "F"] & A' \\ A \arrow[u] \arrow[r, "F"] & A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kokartesisch. Mit der Graduierung auf den Witt-Vektoren (induziert durch die Filtration durch V) erhält man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$W_n(A) \otimes_{W_n(k)} W_n(k') \to W_n(A')$$

ein Isomorphismus ist.

Nun definiert man eine Verschiebung auf $W_\bullet \Omega^\bullet_A \otimes_{W_\bullet(k)} W_\bullet(k')$ durch

$$\begin{array}{rcl} W_n\Omega^i_A \otimes_{W_n(k)} W_n(k') & \to & W_{n+1}\Omega^i_A \otimes_{W_{n+1}(k)} W_{n+1}(k') \\ V(x \otimes FRy) & = & Vx \otimes y \end{array}$$

Für $i = 0$ ist klar, dass dieser mit der Verschiebung auf $W_\bullet(A')$ übereinstimmt. Weiter zeigt man, dass die so definierte Verschiebung auf $W_\bullet \Omega^\bullet_A \otimes_{W_\bullet(k)} W_\bullet(k')$ eine de Rham-V-Prokomplexstruktur erzeugen. Somit gibt die universele Eigenschaft von $W_\bullet \Omega^\bullet_{A'}$ einen Morphismus

$$W_\bullet \Omega^\bullet_{A'} \to W_\bullet \Omega^\bullet_A \otimes_{W_\bullet(k)} W_\bullet(k')$$

und man kann zeigen, dass dieser invers zu obiger Abbildung ist □

Ähnlich zeigt man

Proposition 2.8. *Sei $A \to B$ ein Lokalisationsmorphismus von $\mathbb{F}_p$-Algebren auf X. Dann ist für alle n, i die $W_n(B)$-lineare Abildung*

$$W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n\Omega^i_A \to W_n\Omega^i_B$$

ein Isomorphismus.

Garbifizierung

Für festes n kommutiert der Funktor $W_n(-)$ mit induktiven filtrierenden Limiten von $\mathbb{F}_p$-Algebren. Es folgt, dass die Kategorie VDR(X) induktive filtrierende Limiten besitzt, und dass für $A = \varinjlim A_i$ die kanonische Abbildung

$$\varinjlim W_\bullet \Omega^\bullet_{A_i} \to W_\bullet \Omega^\bullet_A$$

ein Isomorphismus ist.

Man kann so eine Garbe $W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathscr{O}_X}$ auf X definieren, und bezeichnet sie mit $W_\bullet \Omega^\bullet_X$.

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von $\mathbb{F}_p$-Schemata. Dann sind $f_* W_\bullet \Omega^\bullet_X$ und $f^{-1} W_\bullet \Omega^\bullet_Y$ auf natürliche Weise de Rham-V-Prokomplexe und die kanonischen Abbildungen

$$W_\bullet \Omega^\bullet_Y \to f_* W_\bullet \Omega^\bullet_X \tag{2.11}$$

$$f^{-1} W_\bullet \Omega^\bullet_X \to W_\bullet \Omega^\bullet_Y \tag{2.12}$$

sind zueinander adjungiert. Wenn $\mathscr{O}_X = f^{-1}\mathscr{O}_Y$, so ist (2.12) ein Isomorphismus.

Proposition 2.9. 1. *Für alle $n, i \in \mathbb{N}$ ist $W_n\Omega^i_X$ eine quasi-kohärente Garbe über $W_n(X) = (X, W_n \mathscr{O}_X)$.*

2. Sei $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ eine offene affine Teilmenge, so gilt $\Gamma(U, W_n\Omega^i_X) = W_n\Omega^i_A$.

Beweis. Dies folgt leicht aus den bereits gezeigten Funktorialitäten, insbesondere mit Proposition 2.8. □

Folgende Aussage ist nicht-trivial.

Proposition 2.10. *Sei $f : X \to Y$ eine étaler Morphismus von $\mathbb{F}_p$-Schemata. Dann ist die $W_n\mathscr{O}_X$-lineare Abbildung*

$$f^*W_n\Omega^i_Y \to W_n\Omega^i_X$$

ein Isomorphismus.

Schließlich: de Rham–Witt-Komplex

Man definiert für ein $\mathbb{F}_p$-Schema den Komplex

$$W\Omega^\bullet_X := \varprojlim W_n\Omega^\bullet_X$$

und nennt ihn de Rham–Witt-Komplex auf X. Es handelt sich um eine differentiell graduierte Algebra, deren nullter Grad gleich $W\mathscr{O}_X$ ist. DIe Verschiebung $V : W_n\Omega^\bullet_X \to W_{n+1}\Omega^\bullet_X$ induziert einen additiven Morphismus V auf $W\Omega^\bullet_X$, so dass

$$\begin{aligned} xVy &= V(Fx.y) \quad \text{für } x \in W\mathscr{O}_X, y \in W\Omega^i_X && (2.13)\\ V(xdy) &= Vx.dVy \quad \text{für } x \in W\Omega^i_X, y \in W\Omega^j_X && (2.14)\\ d[x].Vy &= V([x]^{p-1}d[x].y) \quad \text{für } x \in \mathscr{O}_X, y \in W\Omega^i_X && (2.15)\end{aligned}$$

Es gibt eine natürliche Rstriktion

$$R : W\Omega^\bullet_X \to W_n\Omega^\bullet_X \tag{2.16}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.11. Anstatt der Kategorie der de Rham-V-Prokomplexe, kann man auch die Kategorie der sogenannten Witt-Komplexe, auch F-V-Prokomplexe genannt, betrachten. Der de Rham-Witt.Komplex kann auch als initiales Objekt in dieser Kategorie verifiziert werden. Diese Herangehensweise wird zum Beispiel von Hesselholt und Madsen [11] oder Langer und Zink [13] gewählt. AUch hier kann man einerseits die Existenz mittels Freyd's Satz beweisen, und andererseits eine direkte Konstruktion angeben. Auch wenn diese zunächst komplizierter erscheint, hat sie den Vorteil, dass sie bereits einen Forbeniusmorphismus liefert. In Illusie's Beweis, wie hier dargestellt, ist die Konstruktion relativ einfach und direkt, jedoch muss man für den Frobenius noch einiges an Arbeit hineinstecken.

Benutzen wir den Zugang via F-V-Komplexen, so werden andere Relationen gefordert, aus denen man jedoch die obigen, insbesondere die etwas mysteriös erscheinende Eigenschaft (V3), herleiten kann.

2.4 Frobenius

Die Konstruktion des Frobenius beruht uaf der Berechnung des de Rham–Witt-Komplexes in einem bestimmten Fall. Wähle $N \in \mathbb{N}$ und setze

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{F}_p[T_1, \dots T_N] && (2.17)\\ B &= \mathbb{Z}_p[T_1, \dots, T_N] && (2.18)\\ C &= \bigcup_{r \geqslant 0} \mathbb{Q}_p\left[T_1^{p^{-r}}, \dots, T_N^{p^{-r}}\right] && (2.19)\end{aligned}$$

Jedes $\omega \in \Omega^m_{C/\mathbb{Q}_p}$ lässt sich eindeutig darstellen in der Form

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_n} a_{\underline{i}}(T) \frac{dT_{i_1}}{T_{i_1}} \cdots \frac{dT_{i_n}}{T_{i_n}} \tag{2.20}$$

Definition 2.12. Man sagt, dass ω ganz ist, wenn die Koeffizienten

$$a_i \in \bigcup_{r\geqslant 0} \mathbb{Z}_p\left[T_1^{p^{-r}},\ldots,T_N^{p^{-r}}\right]$$

Definiere den Unterkomplex (genauer gesagt, die differentiell graduierte $\mathbb{Z}_p$-Unteralgebra) $E^\bullet$ der ganzen Formen in $\Omega^\bullet_{C/\mathbb{Q}_p}$ durch

$$E^m = \left\{\omega \in \Omega^m_{C/\mathbb{Q}_p} \quad | \quad \omega \text{ und } d\omega \text{ sind ganz}\right\}$$

Bemerkung 2.13.

- Man sieht zum Beispiel, dass $T_1^{\frac{1}{p}} \notin E^\bullet$ aber $pT_1^{\frac{1}{p}} \in E^\bullet$.
- Dass es immer möglich ist $\omega \in \Omega^m_{C/\mathbb{Q}_p}$ in der Form (**??**) zu schreiben, sieht man wenn man sich überlegt, dass $d(T_i^{p^{-r}}) = p^{-r}T_i^{p^{-r}}\frac{dT_i}{T_i}$.
- Das Schema assoziiert zu A ist die additive Gruppe $\mathbb{G}_a$, wir werden zeigen, dass $E^\bullet$ den de Rham–Witt-Komplex von dieser berechnet. Illusie in [12, I.2] berechnet gleichzeitig den de Rham–Witt-Komplex von $\mathbb{G}_m$, was im Prinzip die gleichen Techniken, jedoch etwas mehr Aufmerksamkeit erfordert.

Wir definieren Fobenius und Verschiebung zunächst auf C.

Definition 2.14. Sei $F : C \to C$ der $\mathbb{Q}_p$-Algebrenendomorphismus, und $V : C \to C$ der additive Morphismus gegeben durch

$$F(T_i) = T_i^p \text{ und } V(T_i) = pT_i^{\frac{1}{p}} \tag{2.21}$$

das heißt $V = pF^{-1}$. Beide Abbildungen können funktoriell auf den de Rham-Komplex $\Omega^\bullet_{C/\mathbb{Q}_p}$ erweitert werden.

Obige Schreibweise von $\omega \in \Omega^m_{C/\mathbb{Q}_p}$ erlaubt nun diese Morphismen zu schreiben als

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{i_1<\ldots<i_n} F(a_{\underline{i}}(T))\frac{dT_{i_1}}{T_{i_1}}\cdots\frac{dT_{i_n}}{T_{i_n}} \\ V(\omega) &= \sum_{i_1<\ldots<i_n} V(a_{\underline{i}}(T))\frac{dT_{i_1}}{T_{i_1}}\cdots\frac{dT_{i_n}}{T_{i_n}} \end{aligned}$$

Man hat die Identitäten

$$dF = pFd \text{ und } Vd = pdV$$

wie man leicht sieht, wenn man mit Erzeugern rechnet. Insbesondere folgt daraus, dass man F und V auf den Unterkomplex $E^\bullet$ einschränken kann, und die folgende Filtration sinnvoll ist.

Definition 2.15. Für $n, r \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Fil}^r(E^n) = V^r(E^n) + d(V^r(E^{n-1}))$ und

$$E_r^n = E^n / \mathrm{Fil}^r(E^n).$$

und erhält eine Familie differentiell graduierter $\mathbb{Z}_p$-Algebren $E_r^\bullet$ mit einem additiven Morphismus $V : E_r^\bullet \to E_{r+1}^\bullet$, einem differentiell graduierten $\mathbb{Z}_p$-Algebrenmorphismus $F : E''^\bullet_{r+r} \to E_r^\bullet$ und der Projektion $R : E_{r+r}^\bullet \to E_r^\bullet$ induziert durch die Filtration.

Satz 2.16. *Das System $((E_r^\bullet)_{r\in\mathbb{N}}, R, V)$ ist ein de Rham-V-Prokomplex, kanonisch isomorph zu $W_\bullet\Omega_A^\bullet$.*

Beweis. Deer Beweis ist relativ involviert, bzw. rechenintensiv. Wir werden nur die Eigneschaft (V1) zeigen.

Wir wollen zeigen $(E_r^0)_{r\in\mathbb{N}} \cong W_r(A)_{r\in\mathbb{N}}$. Wir haben gesehen, dass $a \in E^0$ eine Darstellung als endliche Summe hat $a = \sum a_{i_1,\ldots i_N} T_1^{i_1}\cdots T_N^{i_N} \in C$ mit $a_{\underline{i}} \in \mathbb{Z}_p$ (das heißt a ist ganz) und für alle j teilt der Nenner von i_j den Koeffizienten $a_{\underline{i}}$ (das heißt da ist ganz). Wir sehen dann, dass

$$E^0 = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} V^n B \tag{2.22}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} V^n E^0 = 0 \tag{2.23}$$

$$B \cap V^n E^0 = p^n B \tag{2.24}$$

Setze

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \bigcup_{r\geqslant 0} \mathbb{F}_p \left[T_1^{p^{-r}},\dots,T_N^{p^{-r}}\right] \\ \widetilde{B} &= \bigcup_{r\geqslant 0} \mathbb{Z}_p \left[T_1^{p^{-r}},\dots,T_N^{p^{-r}}\right] \end{aligned}$$

und F und V ebenfalls wie auf C. Man kann zeigen, dass man für alle $n \in \mathbb{N}$ ein kommutatives Diagramm erhält:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & W(A) \arrow[dd] \\
B \arrow[rrr] \arrow[drr, "V^n"] \arrow[dd, hook] & & & W(A) \arrow[ur, "V^n"] \arrow[dd] & \\
 & & \widetilde{B} \arrow[rr] & & W(\widetilde{A}) \\
\widetilde{B} \arrow[urr, "V^n"] \arrow[rrr] & & & W(\widetilde{A}) \arrow[ur, "V^n"] &
\end{tikzcd}$$

das heißt die Komposition

$$E^0 = \sum V^n B \hookrightarrow \widetilde{B} \to W(\widetilde{A})$$

faktorisiert über $W(A)$ und kommutiert mit V. Nun zeigt man, dass diese Abbildung ein Isomorphismus ist. Das kann gradweise (für die Filtration, die hier nur von V und nicht dV abhängt) gemacht werden, das heißt, zu zeigen ist $E^0/V^rE^0 \cong W_r(A)$ für alle r, weiterhin genügt es, jeden Grad der Graduierung einzeln zu Betrachten, das heißt zu zeigen $V^rE^0/V^{r+1}E^0 \cong V^rW(A)/V^{r+1}W(A)$. Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & F^r_* A \arrow[dl] \arrow[dr, "\sim"] & \\
V^rE^0/V^{r+1}E^0 \arrow[rr, "?", "\sim"'] & & V^rW(A)/V^{r+1}W(A)
\end{tikzcd}$$

und man muss zeigen, dass die linke Abbildung ein Isomorphismus ist. Da V injektiv ist, genügt es, das für $r = 0$ zu machen. Wegen (2.22) induziert die Inklusion $B \subset E^0$ einen Isomorphismus $A = B/pB \xrightarrow{\sim} E^0/VE^0$ und damit

$$\varprojlim E^0/VE^0 \xrightarrow{\sim} W(A).$$

Die Eigenschaften (V2) und (V3) sind komplizierter aber nicht besonders erhellend. Der Beweis, dass $E^\bullet \cong W_\bullet\Omega^\bullet_A$ ist ähnlich wie in Grad 0. □

Der Grund warum wir diese zweite Konstruktion eingeführt haben, war, dass man so auf $W_\bullet\Omega^\bullet_A$ einen Frobenius erhält, und von diesem Spezialfall auf den allgemeinen de Rham–Witt-Komplex schließen kann.

Korollar 2.17. *Sei X ein $\mathbb{F}_p$-Schema. Der Morphismus von projektiven Systemen von Ringen $RF = FR : W_\bullet(\mathscr{O}_X) \to W_{\bullet-1}(\mathscr{O}_X)$ erweitert sich zu einem eindeutigen Morphismus von projektiven Systemen von graduierten Ringen $F : W_\bullet\Omega^\bullet_X \to W_{\bullet-1}\Omega^\bullet_X$ so dass*

1. *Für Schnitte $x \in \mathscr{O}_X$, $n \geqslant 2$ gilt $Fd[x] = [x]^{p-1}d[x]$*
2. *Für $n \in \mathbb{N}$ $FdV = d : W_n(\mathscr{O}_X) \to W_n\Omega^1_X$*

Außerdem hat man folgende Identitäten:

$$FV = VF = p \tag{2.25}$$
$$dF = pFd \tag{2.26}$$
$$Vd = pdV \tag{2.27}$$
$$FdV = d \tag{2.28}$$
$$xVy = V((Fx)y) \tag{2.29}$$
$$d\gamma_k(x) := \gamma_{k-1}(x)dx \text{ für } x \in VW_n(\mathscr{O}_X) \tag{2.30}$$

Letzteres gibt die PD-Struktur.

Beweis. Dies trifft zu für den Fall $X = \mathbb{G}_a$ wie wir gesehen haben. Man führt den allgemeinen Fall auf diesen Fall mit Standardtechniken zurück. Zunächst kann man annehmen, dass $X = \operatorname{Spec} A$ affin ist, da $W_\bullet \Omega^\bullet_X$ lokal konstruiert wurde. Indem man A als projektiven Limes von $\mathbb{F}_p$-Algebren von endlichenm Typ schreibt, und reduziert so auf den Fall, dass A Quotient von $\mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_N]$ ist. □

Der Komplex $E^\bullet$ wird nochmal im Vergleichssatz mit kirstalliner Kohomologie auftauchen.

3 Vergleich mit kristalliner Kohomologie

Wir wollen nun den de Rham–Witt-Komplex, bzw. dessen Hyperkohomologie, mit der kristallinen Kohomologie vergleichen. Dazu erst eine kurze Erinnerung zu kristalliner Kohomologie.

3.1 Kristalline Kohomologie

Wir werden nur die Grundzüge erläutern und uns dazu einschränken auf den Fall wo X ein k-Schema ist, k ein perfekter Körper von Charakteristik $p \neq 0$. Den kristallinen Situs $\operatorname{Cris}(X/W_n(k))$ definiert man wie folgt.

- Die Objekte sind kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} W_n(k) \end{tikzcd}$$

  wobei $U \subset X$ Zariski-offen ist, und $i : U \hookrightarrow V$ eine PD-Verdickung von U (das heißt, das Ideal, das die geschlossen Einbettung definiert hat dividierte Potenzen, also eine PD-Struktur δ, die mit der kanonischen auf den Witt-Vektoren kompatibel ist). Wir notieren kurzerhand (U, V, δ).

- Die Morphismen $(U, V, \delta) \to (U', V', \delta')$ bestehen aus einer offenen Einbettung $U \hookrightarrow U'$ (wie beo Zariski-Topologie) und einem Morphismus $V \to V'$ kompatibel mit den PD-Strukturen.

- Überdeckungen sind Familien von Morphismen $\{(U_i, V_i, \delta_i) \to (U, V, \delta)\}$ so dass $V_i \to V$ offene Einbettung ist für alle i, und $\bigcup V_i = V$.

Nun kann man den kristallinen Topos definieren, das heißt, die Kategorie der Garben auf dem kristallinen Situs, geschrieben $(X/W_n(k))_{\mathrm{cris}}$.

Garben auf $\operatorname{Cris}(X/W_n(k))$ können recht explizit beschrieben werden durch: für jedes Objekt (U, V, δ) eine Zariski-Garbe auf V, zusammen mit Transitionsmorphismen zwischen den (U, V, δ).

Beispiel 3.1. So erhält man zum Beispiel die Strukturgarbe: $\mathscr{O}_{X/W_n(k)} : (U, V, \delta) \mapsto \mathscr{O}_V$.

Der Vorteil des kristallinen Topos gegenüber dem kirstllinen Situs ist, dass man über eine gewisse Funktorialität verfügt, die fehlschlagen kann, wen man mit dem Situs selbst arbeitet. Einem Morphismus von k-Schemata $f : X \to Y$ kann man einen Morphismus $f^{-1} : (Y/W_n(k))_{\mathrm{cris}} \to (X/W_n(k))_{\mathrm{cris}}$ von Topoi zuordnen. Einer Verdickung von Y kann man nicht notwendigerweise durch inverses Bild eine Verdickung von X zuordnen. Aber man kann die Garbe auf X betrachten, die man durch diese Verdickung von Y durch rückziehen der präsentierenden Garbe erhält (nicht notwendig wieder repräsentierbar natürlich).

Kristalline Kohomologie von $X/W_n(k)$ ist nun die Garbenkohomologie der Strukturgarbe.

$$\mathrm{H}^i(X/W_n(k)) := \mathrm{H}^i((X/W_n(k))_{\mathrm{cris}}, \mathscr{O}_{X/W_n(k))})$$

sowie

$$\mathrm{H}^i(X/W) := \varprojlim \mathrm{H}^i(X/W_n(k)).$$

Dies kann man natürlich auch für allgemeinere kristalline Garben betrachten, insbesondere kommt hier die Theorie der Kristalle ins Spiel.

Es gibt eine natürliche Projektion vom kristallinen Topos auf den Zariski-Topos von X, bestehend aus Pushforward und Pullback wie folt

$$\begin{array}{rcl} (X/W_n(k))_{\mathrm{cris}} & \to & X_{\mathrm{Zar}} \\ (u_{X/W_n *}(\mathscr{F}))(U) & = & \Gamma((U/W_n)_{\mathrm{cris}}, j^*_{\mathrm{cris}}(\mathscr{F})) \\ (u^*_{X/W_n}(\mathscr{E}))(U,V,\delta) & = & \mathscr{E}(U) \end{array}$$

Wenn man X anstatt mit der Strukturgarbe mit der konstanten Garbe $W_n(k)$ betrachtet, erhält man sogar einen Morphismus von geringten Topoi. Nach Definition hat man $\Gamma(X_{\mathrm{Zar}}, u_* \mathscr{F}) = \Gamma(X/W_n(k), \mathscr{F})$. Und man kann zeigen

$$\mathrm{H}^i(X/W_n(k), \mathscr{O}_{X/W_n}) \cong \mathrm{H}^i(X_{\mathrm{Zar}}, Ru_* \mathscr{O}_{X/W_n(k)}).$$

Sei $j : X \hookrightarrow Z$ eine geschlossene Einbettung in ein glattes Schema über $W_n(k)$, und $\widetilde{j} : X \hookrightarrow \widetilde{Z}$ die infnitesimale PD-Umgebung von X in Z. Es gibt einen eindeutigen integrablen Zusammenhang

$$d : \mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \to \mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \otimes \Omega^1_{Z/W_n(k)}$$

so dass $d\gamma_n(x) = \gamma_{n-1}(x) \otimes dx$ für $x \in \widetilde{J}$.So erhält man einen Complex $\mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \otimes \Omega^\bullet_{Z/W_n(k)}$ über X. Berthelot zeigt:

Satz 3.2. *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^i(X/W_n(k)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i\left(X, \mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \otimes \Omega^\bullet_{Z/W_n(k)}\right)$$

Insbesondere stimmen die kristalline Kohomologie von X und algebraische de Rham-Kohomologie von Z überein, wenn $\widetilde{Z} = Z$. Diesen Satz werden wir im Beweis des Vergleichs benötigen.

3.2 Aussage und Beweis des Vergleichs

Es soll gezeigt werden:

Satz 3.3. *Sei X ein glattes k-Schema. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^*(X/W_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^*(X, W_n\Omega^\bullet_X)$$

kompatibel mit Frobenius auf beiden Seiten.

Der Beweis erfolgt in mehreren Etappen.

Definition eines Homomorphismus $Ru_{X/W_n *}(\mathscr{O}_{X/W_n}) \to W_n\Omega^\bullet_X$

Erster Fall: es gibt eine geschlossene Einbettung $X \hookrightarrow Z$ in ein glattes Schema Z/W_n die sich erweitern lässt zu einer Einbettung $W_n(X) \hookrightarrow Z$. Man will $X \to \widetilde{Z}$ faktorisieren über $W_n(X)$, was möglich ist, da das Ideal $VW_{n-1}(\mathscr{O}_X)$ eine PD-Struktur besitzt (die oben erwähnte kanonische). Damit erhält man einen Garbenmorphismus

$$\mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \to W_n(\mathscr{O}_X)$$

und via Funktorialität einen Morphismus von Komplexen

$$\Omega^\bullet_{\widetilde{Z}} \to \Omega^\bullet_{W_n(\mathscr{O}_X)}$$

Um Berthelots Satz 3.2 zu verwenden, weisen wir noch darauf hin, dass $\mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \otimes \Omega^\bullet_{Z/W_n(k)}$ isomorph ist zu dem Quotienten von $\Omega_{\widetilde{Z}}$ durch das Ideal, das von den Relationen $d\gamma_k(x) = \gamma_{k-1}(x) \otimes dx$. Unter Berücksichtigung der PD-Sruktur erhl̈t man dann einen Morphismus von Quotienten

$$\Omega^\bullet_{\widetilde{Z}}/(d\gamma_k(x) - \gamma_{k-1}(x) \otimes dx) \to \Omega^\bullet_{W_n(\mathscr{O}_X)}/(d\gamma_k(Vx) - \gamma_{k-1}(Vx) \otimes dx$$

Die kanonische Projektion π bildet letzter dann in den de Rham–Witt-Komplex ab. Zusammen erhält man:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \otimes \Omega^\bullet_{Z/W_n} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[drr] & \Omega^\bullet_{\widetilde{Z}}/\sim \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega^\bullet_{W_n(\mathscr{O}_X)}/\sim \arrow[d] \\ Ru_* \mathscr{O}_{X/W_n} \arrow[rr] & & W_n\Omega^\bullet_X \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Man zeigt, dass dies unabhängig von der Wahl der Einbettung $X \hookrightarrow Z$ ist (und dem zugehörigen Lift des Frobenius): angenommen, es gibt eine zweite geschlossene Einbettung $X \hookrightarrow Z'$ mit denselben Eigenschaften und zugehörigem Frobenius F'. Dann betracht die geschlosene Einbettung $X \hookrightarrow Y = Z \times_{W_n} Z'$, die ebenfalls die gleichen Bedingunen erfüllt und den Frobenius $G = F \times_{W_n} F'$. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Ru_* \mathscr{O}_{X/W_n} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathscr{O}_{\widetilde{Z}} \otimes \Omega^\bullet_{Z/W_n} = \Omega^\bullet_{\widetilde{Z}}/\sim \arrow[d] \\ Ru_* \mathscr{O}_{X/W_n} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \otimes \Omega^\bullet_{Y/W_n} = \Omega^\bullet_{\widetilde{Y}}/\sim \end{tikzcd}$$

wobei der rechte Morphismus durch die Projketion definiert ist. Ebenso erhält man durch Funktorialität mittels der Projektion ein kommuatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega^\bullet_{\widetilde{Z}}/\sim \arrow[r] \arrow[d] & W_n\Omega^\bullet_X \arrow[d, equal] \\ \Omega^\bullet_{\widetilde{Z}}/\sim \arrow[r] & W_n\Omega^\bullet_X \end{tikzcd}$$

Wenn man die Diagramm zusammenfügt, und das selbe für Z' macht, erhält man wie gewünscht Unabhängigkeit.

Zweiter Fall: der allgemeine Fall. Auch wenn im allgemeinen sich der Morphismus $X \to Z$ global nicht faktorisiert durch $W_n(X)$, so ist dies immer lokal der Fall. Man wähle eine offene Überdeckung (U_α) von X und geschlossene EInbettungen $U_\alpha \to Z_\alpha$, die obige Bedingungen erfüllen, insbesondere faktorisieren über $W_n(U_\alpha)$. Setze

$$U_0 = \coprod U_\alpha, \quad U_1 = U_0 \times_X U_0, \quad \dots$$

und

$$Z_0 = \coprod Z_\alpha, \quad Z_1 = Z_0 \times_{W_n} Z_0, \quad \dots$$

Man erhält ein simpliziales System von Schemata

$$\begin{tikzcd} & W_m(U_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z}_\bullet \arrow[dl] \\ U_\bullet \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & Z_\bullet \arrow[dd] & \\ X \arrow[d] & & \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r] & \operatorname{Spec} W_n & \end{tikzcd}$$

und eine Abbildung

$$\mathscr{O}_{\widetilde{Z}_\bullet} \otimes \Omega^\bullet_{Z_\bullet} \to W_n\Omega^\bullet_{U_\bullet}$$

Mittels kohomologischem Descent erhält man, dass das Bild von $R\varepsilon_*$ links $Ru_* \mathscr{O}_{X/W_n}$ und rechts $W_n\Omega^\bullet_X$ ist. Unabhängigkeit von den Wahlen folgt wie oben. Ferner ist klar, dass es genügt zu zeigen, dass man im ersten Fall einen Isomorphismus erhält, um auch in diesem zweiten Fall einen Isomorphismus zu erhalten. Beschränken wir uns somit darauf.

Kompatibilität mit Strukturen

Proposition 3.4. *Die Abbildung (3.1) ist kompatibel mit Multiplikation, Fobenius und Projektion, und funktoriell in X.*

Beweis. Kompatibilität mit Multiplikation folgt aus der Funktorialität der Konstruktionen (universellen Eigenschaft der de Rham-Komplexe). Ähnlich für Funktorialität in X. Kompatibilität mit Frobenius kann als Spezialfall davon gesehen werden. Kompatibilität mit Projektion R kommt von der Kompatibilität der Konstruktion mit der Projektion auf dem Grundring W_n, bzw. Änderung des Grundrings $W_n \to W_m$, und dass man ein projektives System von Morphismen erhält. □

Zeige dies ist ein Quasi-Isomorphismus

Proposition 3.5. *Die Abbildung (3.1) ist ein Quasi-Isomorphismus.*

Beweis. Da die Frage lokal ist, kann man annehmen, dass $X = \operatorname{Spec} A$ affin über k ist. Man kann sich sogar einschränken (wenn ,an ëtale lokalisiert) auf den Fall

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[T_1, \ldots, T_N] \\ Z &= \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[T_1, \ldots, T_N] \end{aligned}$$

den wir bereites untersucht haben. Da das definierende Ideal $p\,\mathbb{Z}_p[T_1, \ldots, T_N]$ bereits eine PD-Struktur besitzt, gilt in diesem Fall $Z = \widetilde{Z}$ und wir müssen lediglich zeigen

$$\Omega^\bullet_B / p^n \Omega^\bullet_B \to W_n \Omega^\bullet_A$$

ist ein Quasi-Isomosphismus. Doch haben wir bereits eine alternative Beschreibung für den rechten Term: $W_n \Omega^\bullet_A = E^\bullet_n$. Mit $C = \mathbb{Q}_p[T_1, \ldots, T_N]$ wie vorher, existiert eine Injektion

$$\alpha : \Omega^\bullet_B \hookrightarrow E^\bullet \subset \Omega^\bullet_{C/\mathbb{Q}_p}$$

Damit findet man einen Unterkomplex $E^\bullet_{\text{frac}} \subset E^\bullet$ so dass

$$E^\bullet = \Omega^\bullet_B \oplus E^\bullet_{\text{frac}}$$

Man kann nun zeigen, dass $E^\bullet_{\text{frac}}$ nullhomotop ist. Die Inklusion oben induziert also einen Quasi-Isomorphismus für jedes n

$$\Omega^\bullet_B / p^n \xrightarrow{\sim} E^\bullet_n$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 3.6. Die Nullhomotopie des Komplexes $E^\bullet_{\text{frac}}$ ist nicht-trivial. Eine ähnliche Strategie verfolgen beispielsweise Davis, Langer und Zink in [6], auch sehr übersichtlcih nachzulesen in [5, Proposition 4.2.1].

Damit ist der Beweis des Satzes abgeschlossen.

4 Beispiele

4.1 Der de Rham–Witt-Komplex über einem perfekten Körper

Der de Rham–Witt-Komplex über einem perfekten Körper sollte aus Dimensionsgründen heuristisch konzentriert in Grad 0. Wir können jedoch noch eine algemeinere Aussage zeigen [12, I. Prop. 1.6].

Proposition 4.1. *Sei A eine perfekte $\mathbb{F}_p$-Algebra (das heißt der Frobeniusendomorphismus ist surjektiv). Dann ist $W_\bullet \Omega^i_A = 0$ für $i > 0$.*

Beweis. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Projektion $\pi_n : \Omega^\bullet_{W_n(A)} \to W_n \Omega^\bullet_A$ surjektiv ist, genügt es offensichtlich die Aussage für den Komplex $\Omega^\bullet_{W(A)}$ zu beweisen, das heißt, für alle $n \geqslant 1$ und $i > 0$ ist $\Omega^i_{W_n(A)} = 0$. Weiterhin kann man sich auf den Fall $i = 1$ einschränken, und angesichts der universellen Eigenschaft ist das äquivalent dazu zu zeigen, dass für einen $W_n(A)$-Modul M jede $\mathbb{Z}$-Derivation $\delta : W_n(A) \to M$ trivial ($= 0$) ist. Wir sahen bereits, dass man ein Element $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in W_n(A)$, schreiben kann als $x = [x_0] + V[x_1] + \cdots + V^{n-1}[x_{n-1}]$. Nun lassen wir die Frobeniuspotenz F^n darauf operieren. (Es ist nur die Existenz von F auf $W_n(A)$ notwendig, nicht auf $W_n \Omega^\bullet_A$.)

$$F^n x = F^n[x_0] + F^n V[x_1] + \cdots + F^n V^{n-1}[x_{n-1}].$$

Unter Berücksichtigung, dass $FV = VF = p$, erhält man

$$F^n x = [x_0]^{p^n} + p[x_1]^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}[x_{n-1}]^p.$$

Damit folgt, dass der Term $\delta F^n x$ durch p^n teilbar ist, und somit in $W_n \Omega^1_A$ verschwindet. Doch da nach Annahme F und damit auch F^n ein Automorphismus ist, kann man schließen, dass d identisch null ist. □

4.2 Der de Rham–Witt-Komplex über $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$

Dieses Beispiel haben wir bereits erläutert, da es eine fundamentale Rolle in der Konstruktion des de Rham–Witt-Komplexes spielt, genauer gesagt, in der Definition eines Frobenius darauf.

4.3 Der de Rham–Witt-Komplex über $\mathbb{Z}_{(p)}$

Diese Beispiel wird von Hesselholt und Madsen gegeben [11] [11, Example 1.2.4]

Wir betrachten $W_\bullet\Omega^\bullet_{\mathbb{Z}_{(p)}}$. Wir haben bereits erwähnt dass wenn A eine $\mathbb{Z}_{(p)}$-Algebra ist, dann gilt das gleiche für $W_n(A)$. Dies sieht man, wenn man sich klar macht, dass eine ganze Zahl, die invertierbar ist in A dies ebenso in $W_n(A)$ ist. Also ist $W_n(\mathbb{Z}_{(p)})$ eine $\mathbb{Z}_{(p)}$-Algebra.

Lemma 4.2. *Als $\mathbb{Z}_{(p)}$-Modul ist*

$$W_n(\mathbb{Z}_{(p)}) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}_{(p)}\, V^i(1)$$

mit Produkt gegeben durch

$$V^i(1)V^j(1) = p^i V^j(1),$$

für $0 \geqslant i \geqslant j < n$

Beweis. Die erste Aussage folgt durch Induktion. Die Aussage für $n = 1$ ist klar. Angenommen, die Aussage sei für $n-1$ bewiesen. Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{V^{n-1}} W_n(\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{R} W_{n-1}(\mathbb{Z}_{(p)}) \to 0$$

und aus dieser folgt die Dekomposition.

Die zweite Aussage folgt aus den Relationen $FV = p$ sowie $xV(y) = V(F(x)y)$. Es genügt den Fall $i = 1$ su betrachten. Sie also in der vorigen Formel $x = V(1)$ und $y = 1$. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} V(1)V(1) &= V(FV(1)1) \\ &= V(p \cdot 1) = pV(1) \end{aligned}$$

Oder dann für höhere Potenzen $0 \geqslant i \geqslant j < n$

$$\begin{aligned} V^i(1)V^j(1) &= V^j(F^jV^i(1)1) \\ &= V^j(p^iF^{j-i}(1)\cdot 1) \\ &= V^j(p^i 1) \\ &= p^iV^j(1) \end{aligned}$$

da p p-fache Addition meint, und V additiv ist, und $F(1) = 1$. □

Wir können nun versuchen die kanoniche Projektion

$$\Omega^\bullet_{W_n(\mathbb{Z}_{(p)})} \to W_n\Omega^\bullet_{\mathbb{Z}_{(p)}}$$

zu nutzen, um die rechte Seite etwas abzuschätzen.

In Grad Null ist sie ein Isomorphismus nach Definition. In Grad eins verfügen wir über folgende Relationen für $0 \geqslant i \geqslant j < n$

$$\begin{aligned} V^i(1)dV^j(1) &= V^i(F^idV^j(1)) = V^idV^{j-i}(1) = p^idV^j(1) \\ V^j(1)dV^i(1) &= V^j(F^jdV^i(1)) = V^jF^{j-i}d(1) = 0 \end{aligned}$$

Es folt dass $p^idV^i(1) = dV^i(1)dV^j(1) = 0$ für alle $0 \geqslant i, j < n$. Somit ist, angesichts obiger Darstellung von $W_n(\mathbb{Z}_{(p)})$ als $\mathbb{Z}_{(p)}$-Modul, $W_n\Omega^q_{\mathbb{Z}_{(p)}} = 0$ für $q > 1$.

Es bleibt $q = 1$. In diesem Fall haben wir eine kanonische Surjektion

$$\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}/p^i\,\mathbb{Z}\cdot dV^i(1) \to W_n\Omega^1_{\mathbb{Z}_{(p)}}.$$

Dies ist sogar ein Isomorphismus. Um die Injektivität zu zeigen, genügt es, dies für einen beliebigen Witt-Komplex $E^\bullet_\bullet$ (oder de Rham-V-Prokomplex) anstelle von $W_\bullet\Omega^\bullet_{\mathbb{Z}_{(p)}} = 0$ zu tun, dann folgt die Aussage aus der universellen Eigenschaft. Hesselholt und Madsen geben einen solchen an in [11, Prop. 2.6.1].

Literatur

[1] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, 1978.

[2] Pierre Cartier. Groupes formels associéés aux anneaux de Witt généralisés. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 265:A129–A132, 1967.

[3] Antoine Chambert-Loir. Cohomologie cristalline: un survol. *Exposition. Math.*, 16(4):333–382, 1998.

[4] Christopher James Davis. On the de Rham–Witt complex.

[5] Christopher James Davis. *The Overconvergent de Rham–Witt Complex.* PhD thesis, MIT, Boston, 2009.

[6] Christopher James Davis, Andreas Langer, and Thomas Zink. Overconvergent de Rham–Witt cohomology. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér*, 44(2):197–262, 2011.

[7] Pierre Deligne. v-complexe de de Rham. notes manuscripts.

[8] Lars Hesselholt. The absolute and relative de Rham–Witt complexes. *Compositio Mathematica*, 141:1109–1127, 9 2005.

[9] Lars Hesselholt. Lecture notes on Witt vectors. 2005.

[10] Lars Hesselholt and Ib Madsen. On the k-theory of nilpotent endomorphisms. In *Homotopy methods in algebraic topology (Boulder, CO, 1999)*, volume 271 of *Contemp. Math.*, pages 127–140, Providence, RI, 2001. Amer. Math. Soc.

[11] Lars Hesselholt and Ib Madsen. On the de Rham–Witt complex in mixed characteristic. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 37:1–43, 2004.

[12] Luc Illusie. Complex de de Rham–Witt et cohomologie cristalline. *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. 4e série*, 12(4):501–661, 1979.

[13] Andreas Langer and Thomas Zink. De Rham–Witt cohomology for a proper and smooth morphism. *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, 3(2):231–314, 2004.

[14] Joseph Rabinoff. The theory of Witt vectors. 2007.

[15] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux.* Publications de l'Institut de mathématique de l'université de Nancago. Hermann, 2004, Paris, 1968. Autre tirage : 1980.

[16] Ernst Witt. Zyklische körper und algebren der charakteristik p vom grad pn. struktur diskret bewerteter perfekter körper mit vollkommenem restklassenkörper der charakteristik p. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 176:126–140, 1937.

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Universitätsstraße 31
93053 Regensburg
Germany
(+ 49) 941-943-2664
veronika.ertl@mathematik.uni-regensburg.de
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/ertl/