
GROUPE DE TRAVAIL – MOTIFS DE BERKOVICH D'APRÈS SCHOLZE

par

Veronika Ertl-Bleimhofer

Résumé. —

Abstract (Seminar – Berkovich motives after Scholze). —

Table des matières

1. Pourquoi motifs ?	1
2. Pourquoi de Berkovich ?	2
3. La topologie arc	3
4. Les résultats principaux	4
5. Exposés possibles	5
Références	6

1. Pourquoi motifs ?

Les différentes théories de cohomologie, mais aussi d'autres invariants comme la K -théorie sont des outils très importants en géométrie que probablement tout le monde parmi nous rencontre régulièrement.

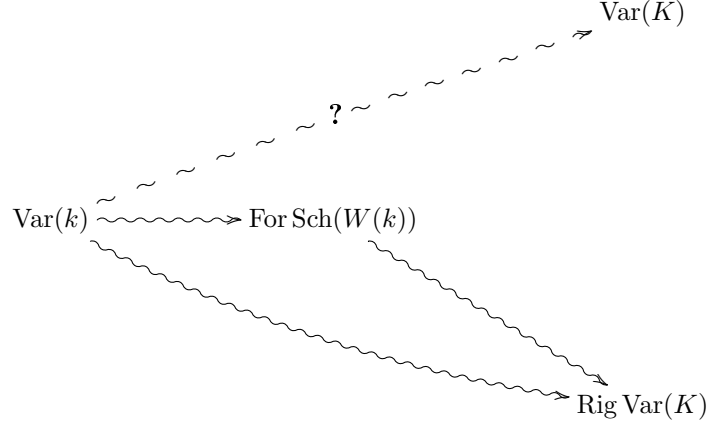
Une vision de Grothendieck était qu'on devrait avoir une catégorie universelle dite « motifs » avec des foncteurs de réalisation qui permettent de voir tous ces invariants de façon naturelle. Tandis que une telle théorie de motifs universelle n'est pas encore connue, on a depuis Voevodsky une catégorie dérivée de motifs – plutôt une catégorie d'infinité stable, $\mathcal{D}_{\text{mot}}(S)$ de faisceaux motiviques (sur un schéma S) avec un formalisme de « six foncteurs » (d'après Ayoub [1]). Et ce formalisme de six foncteurs suffit pour beaucoup d'applications en géométrie algébrique/arithmétique.

Une problème qu'on rencontre est que cette catégorie d'infinité de motifs n'est pas très explicite, comme elle prend en compte toutes les homotopies (et donc les morphismes dans cette catégorie sont liés à la K -théorie, ce qui est toujours difficile à calculer, avec plusieurs conjectures comme la conjecture de Hodge, de Tate, de Beilinson–Soulé.

Mais pour plusieurs applications, c'est assez naturel de considérer les motifs.

Mots clefs. — Motifs, formalism de six foncteurs, espaces de Berkovich, espaces adiques.

Exemple 1.1. — Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, avec anneau de vecteurs de Witt $W(k)$. En générale, pour une variété (lisse affine/projective) sur k la cohomologie de de Rham n'a pas des bonne propriétés (à cause des difficultés d'intégration). Donc on s'intéresse naturellement à des relèvements en caractéristique 0, c'est-à-dire en $W(k)$.



On trouve (par exemple déjà dans le travail de Monsky–Washnitzer), qu'au moins dans le cas affine lisse, on peut trouver des relèvements en passant par (des variations) de schémas formelles, et aussi des relèvements de morphismes, mais seulement à recouvrements étales près et à homotopie près.

Les motifs permetts d'incorporer ça naturellement dans le formalisme. Par suite, beaucoup de «calculs» se fait localement, sur les objets affines.

2. Pourquoi de Berkovich ?

Scholze avait en tête des applications à la correspondance de Langlands locale, plus précisément sa géométrisation. C'est traiter dans son papier le plus récent [9] (qui étend son travail avec Fargue de faisceaux ℓ -adiques aux faisceaux motiviques, ce qui montre aussi l'indépendance du ℓ choisi tant que $\ell \neq p$, la caractéristique de la base).

Dans ce contexte il a besoin d'une version rigide-analytique, et plus précisément les diamants [7] (quotients d'espaces perfectoides par des relations pro-étales). Plus généralement, cela devrait aussi être applicable aux v -champs.

C'est grâce au travail d'Ayoubé [2], de Vezzani [10], de Ayoubé–Gallauer–Vezzani [3], qu'on a une théorie de motifs qui permet de faire ça.

Remarque 2.1. — Dans la situation d'avant, soit $\mathfrak{S}$ un schéma formel sur $W(k)$, avec fibre spéciale $\mathfrak{S}_\sigma$ et fibre générique $\mathfrak{S}_\eta$. On a des foncteurs naturels

$$\mathrm{Rig} \, Sm/\mathfrak{S}_\eta \leftarrow \mathrm{For} \, Sm/\mathfrak{S} \rightarrow Sm/\mathfrak{S}_\sigma$$

et Ayoub a montré que le foncteur de fibre spéciale donne une équivalence de catégorie

$$\mathrm{Mot}(\mathfrak{S}_\sigma) \cong \mathrm{For} \, \mathrm{Mot}(\mathfrak{S})$$

entre les motifs formels et algébriques. Après on peut utiliser le foncteur de fibre générique pour arriver aux motifs rigid-analytiques

$$\mathrm{Mot}(\mathfrak{S}_\sigma) \xleftarrow{\sim} \mathrm{For} \, \mathrm{Mot}(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathrm{Rig} \, \mathrm{Mot}(\mathfrak{S}_\eta).$$

Vezzani a montré qu'on a aussi une équivalence $\mathrm{Rig} \, \mathrm{Mot}(\mathfrak{S}_\eta) \cong \mathrm{Rig} \, \mathrm{Mot}^\dagger(\mathfrak{S}_\eta^\dagger)$ avec les motifs de sur-convergents, mais cela ne va pas jouer un rôle importantes ici - tandis que la surconvergence apparaît à plusieurs instances.

Par contre, dans leur travaux, il faut toujours passer par les motifs formels et éventuellement on peut réduire aux motifs algébriques. Si on veut traiter les v -champs, il faut alors réduire aux variétés rigides analytiques.

Scholze observe qu'on peut développer les fondements de la théorie dans une langage assez proche à celle utiliser dans la théorie des diamants, qui par la suite s'applique directement aux v -champs.

Il travaille dans le contexte de Berkovich [4] pour plusieurs raisons :

(i) C'est plus générale, dans le sens qu'on peut traiter le cas archimédien et non-archimédien (il a déjà aspiré à une telle unification dans le traitement de la mathématique condensé).

(ii) Une raison technique : le théorème d'annulation (cancellation theorem) est vrai sur n'importe quelle base. Dans la théorie d'Ayoub et al. le théorème d'annulation n'est que vrai sur les corps. Dans le papier, c'est le résultat (technique) principal. Il permet d'invertir le twist de Tate, ce qui est nécessaire pour obtenir la catégorie (d'infinité/dérivée) des motifs à partir la catégorie des motifs effectifs. Il dit que c'est la partie la moins formelle qui utilise des techniques développer par Voevodsky [11] comme les préfaisceaux avec transferts.

(iii) Avec cette définition, pour beaucoup de S la catégorie $\mathcal{D}_{\text{mot}}(S)$ devient dualisable. Dans la théorie des motifs rigide analytique d'Ayoub et al. il y a des objets compacts qui ne sont dualisable. Mais le fait que la théorie de Berkovich admet des catégorie qui sont plus proche à la catégorie des faisceaux sur les espace de Hausdorff compact induit que tous les objets compacts sont dualisable.

(iv) Finalement une raison philosophique : la catégorie qu'on obtient (à partir du formalisme de six foncteurs) - une $(\infty, 2)$ -catégorie symétrique monoidale, présentable - devrait classifier certains champs d'anneaux normés (normed ring stacks) de façon appropriée, donnant un exemple non-trivial d'une catégorie présentable, monoidale, symétrique rigide (a nontrivial example of a 2-rigid symmetric monoidal presentable $(\infty, 2)$ -category).

3. La topologie arc

Dans ce contexte on travail avec les **anneaux de Banach** :

Définition 3.1. — Un anneau de Banach est un anneau A avec une (semi)norme

$$|\cdot|_A : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tel que A soit complet de Cauchy par rapport à la topologie induite.

Comme tout anneau A admet la norme discrète $|a| = 1$ pour $a \neq 0$, on a une immersion

$$\{ \text{anneaux discrets} \} \subset \{ \text{anneaux de Banach} \}.$$

Le spectre de Berkovich $\mathcal{M}(A)$ est un espace de Hausdorff compact qui classifie les applications de A vers les corps de Banach. Il y a trois types de corps de Banach :

- (i) Corps discrets.
- (ii) Corps de Banach archimédiens (c'est-à-dire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ d'après Gelfand–Mazur).
- (iii) Corps de Banach non-archimédiens (avec anneaux des entiers un anneau de valuation de rang 1).

Maintenant, on va travailler strictement localement, c'est-à-dire avec la catégorie des faisceaux sur les anneaux de Banach (et pas avec les espace de Berkovich). Comme on veut obtenir quelque chose qui permet de travailler avec les v -champs, on introduit une topologie analogue, mais dans la théorie de Berkovich. On trouve que c'est une topologie plus proche à l'arc-topologie introduit par Bhatt et Matthew [5].

Définition 3.2. — Une collection de morphism $\{A \rightarrow B_i\}_{i \in I}$ d'anneaux de Banach est un arc-recouvrement s'il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$, tel que

$$\bigcup_{j \in J} \mathcal{M}(B_j) \rightarrow \mathcal{M}(A)$$

soit surjectif.

Pour tout anneau de Banach A , on denote $\mathcal{M}_{\text{arc}}(A)$, la faisceauification par rapport à arc du préfaisceau $B \mapsto \text{Hom}(A, B)$, représenté par A .

Cette topologie est très fine et loin d'être sous-canonique. Mais les invariants « géométrique » (espaces de Berkovich, cohomologie étale etc.) satisfait descente par rapport à cette topologie.

Travailler localement permet aussi de descendre à la situation algébrique et ainsi de retrouver la théorie de Voevodsky.

4. Les résultats principaux

La première définition principale

Définition 4.1. — Pour un arc-champ X soit $\mathcal{D}(X_{\text{arc}}, \mathbb{Z})$ la ∞ -catégorie stable d'arc-hyper-faisceaux avec valeurs dans $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$. La catégorie de motifs effectifs sur X est la sous-catégorie pleine

$$\mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X) \subset \mathcal{D}(X_{\text{arc}}, \mathbb{Z})$$

des faisceaux qui sont finitaires (à définir) et invariant par la disque d'unité.

Remarque 4.2. — Les faisceaux intéressants devraient être ceux qui commutent aux co-limites filtrées des anneaux de Banach - mais comme cela n'est pas compatible avec l'arc-topologie, on exige une propriété un peu plus faible.

On peut décrire quelques instances de $\mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X)$ de façon explicite. Pour simplifier, soit X un point.

Proposition 4.3. — Soit C un corps de Banach non-discrète et $X = \mathcal{M}_{\text{arc}}(C)$.

(i) Si $C = \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X) \subset \mathcal{D}(X_{\text{arc}}, \mathbb{Z})$$

avec image effectif les faisceaux finitaires.

(ii) Si C est non-archimédien et n inversible sur le corps résiduel de C , alors

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \subset \mathcal{D}(X_{\text{arc}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

et être $\mathbb{B}^1$ -invariant est équivalent à être invariant par changement de corps algébriquement clos.

(iii) Si C est non-archimédien avec caractéristique résiduelle p , alors p est inversible dans $\mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X)$.

(iv) Si C est de caractéristique mixte alors

$$\mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X) \cong \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X^b)$$

– Le point (i) montre que la théorie est équivalent à la théorie de faisceaux de Betti.

– (ii) montre l'équivalence avec la théorie étale ($\ell \neq p$).

– (iv) a été montré par Vezzani dans une langage différente.

Le produit tensoriel de $\mathcal{D}(X_{\text{arc}}, \mathbb{Z})$ descend à $\mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X)$. Plus précisément il restreint à la sous-catégorie de $\mathcal{D}(X_{\text{arc}}, \mathbb{Z})$ de faisceaux finitaires. Après il faut montrer qu'il descend au quotient de Verdier des objet $\mathbb{B}^1$ -invariants.

Maintenant, on peut déjà « presque » définir un formalisme de six foncteurs, sauf qu'on a besoin d'invertir le twist de Tate.

Définition 4.4. — Pour un morphisme lisse $f : Y \rightarrow X$ le pull-back

$$f^* : \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(Y)$$

admet un adjoint à gauche $f_{\sharp} : \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X)$. En appliquant ça à l'objet d'unité, on obtient le motif libre en Y

$$\mathbb{Z}_{\text{mot}}[Y] \in \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X).$$

Ainsi, on peut définir le twist de Tate comme

$$\mathbb{Z}(1) := (\mathbb{Z}_{\text{mot}}[\mathbb{G}_m]/\mathbb{Z}_{\text{mot}}[*])[-1]$$

en considérant $\mathbb{G}_m$ comme schéma sur X .

Un de théorème principal est le théorème d'annulation :

Théorème 4.5. — Pour tout arc-champ petit X , le foncteur

$$- \otimes \mathbb{Z}(1) : \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X)$$

est pleinement fidèle.

Avec ça, on peut inverser formellement le Tate twist :

Définition 4.6. — Soit X un arc-champ petit. La ∞ -catégorie stable présentable de motif sur X est

$$\mathcal{D}_{\text{mot}}(X) := \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X)[\mathbb{Z}(1)^{\otimes -1}] = \varprojlim_{\mathcal{H}om(\mathbb{Z}(1), -)} \mathcal{D}_{\text{mot}}^{\text{eff}}(X).$$

Propriétés :

(i) $\mathcal{D}_{\text{mot}}(X)$ admet un formalisme de six foncteurs ou les morphismes lisses sont les morphismes cohomologiquement lisses.

(ii) Si X est un point géométrique, alors $\mathcal{D}_{\text{mot}}(X)$ est engendré de façon compacte et les objets compacts sont les objets dualisables.

Si X est équi-caractéristique, $\mathcal{D}_{\text{mot}}(X)$ est engendré par les variétés lisses projectives de bonne réduction. (Ici c'est encore important d'utiliser la théorie de Berkovich.)

(iii) Si k est un corps discret algébriquement clos et $X = \mathcal{M}(k)$, alors $\mathcal{D}_{\text{mot}}(X)$ coïncide avec les motifs étales de Voevodsky.

5. Exposés possibles

Dépendant de notre temps et intérêt, on peut suivre le papier plus ou moins linéairement, avec quelques références supplémentaires où nécessaire.

- (i) le spectre de Berkovich (un ou deux exposés ?)
- (ii) l'arc topologie (un exposé ?)
- (iii) les arc-faisceaux finitaires (un ou deux exposés ?)
- (iv) les arc-motifs effectifs (un ou deux exposés ?)
- (v) les twist de Tate (motifs libres) (un exposé ?)
- (vi) le théorème d'annulation (un exposé ?)
- (vii) K -théorie (un exposé ?)
- (viii) la définition des motifs et quelques exemples (pour un point) (un ou deux exposés ?)
- (ix) comparaison au motifs de Voevodsky (un exposé ?)
- (x) relations au v -champs (un exposé ?)

Références

- [1] AYOUB J. — *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique, I* Astérisque no. 314, pp. x+466, (2007).
- [2] AYOUB J. — *Motifs des variétés analytiques rigides*. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), no. 140-141, pp. vi+386, (2015).
- [3] AYOUB J., GALLAUER M., VEZZANI A. — *The six-functor formalism for rigid analytic motives*. Forum Math. Sigma 10, Paper No. e61, pp. 182, (2022).
- [4] BERKOVICH, V.G. — *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, (1990).
- [5] BHATT B., MATTHEW A. — *The arc-topology*. Duke Math. J., vol. 170, no. 9, pp. 1899–1988, (2021).
- [6] SCHOLZE P. — *Étale cohomology of diamonds*. À paraître dans Astérisque, (2017).
- [7] SCHOLZE P. — *Berkovich motives*. Prépublication, (2024).
- [8] SCHOLZE P. — *Geometrization of the local Langlands correspondence, motivically*. Prépublication, (2025).
- [9] VEZZANI A. — *The Monsky–Washnitzer and the overconvergent realizations*. Int. Math. Res. Not., vol. 2018, no. 11, pp. 3443–3489, (2018).
- [10] VOEVODSKY V. — *Cancellation theorem*. Doc. Math., Extra Volume, pp. 671–685, (2010).

Version du 28 février 2025

V. ERTL, Université de Caen Normandie, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, 6 boulevard Maréchal Juin,
14032 Caen CEDEX, France • E-mail : `veronika.ertl@unicaen.fr`