La conjecture de Gersten pour la K-théorie de Milnor d'après M. Kerz

22 novembre 2012

1 But

Montrer que le complexe de Gersten

$$0 \to \mathscr{K}_n^M\big|_X \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*} K_n^M(x) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*} K_{n-1}^M(x) \to \cdots \tag{1}$$

est exacte pour la K-théorie de Milnor. Ici, X est un schéma régulier, excellent sur un corps infini (suffisant : tout corps résiduel soit infini).

Remark 1.1. Le cas d'un corps résiduel fini est plus compliqué.

2 Motivation

Quelques faits historiques.

- K-théorie de Milnor introduit pour un corps (1970), conjectures de Milnor.
- Parshin, Bloch, Kato, Saito (70's) : utiliser K-théorie de Milnor pour définir groupes de classes de schémas arithmétiques – nécessaire de considérer la K-théorie de Milnor pour un anneau. (Le groupe multiplicatif $K_1(F) = K^*$ remplacé par les K-groupes supérieurs)
- Kato : pour géneralisr la formule $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}^*) = \mathrm{CH}^1(X)$ à une formule de la forme $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{K}_n^M) = \mathrm{CH}^n(X)$ en utilisant les K-groupes de Milnor il a construit un complexe de Gersten.
- Suslin (80's) : à torsion prêt K-groupes de Milnor sont facteurs de K-groupes de Quillen (pour corps).
- Suslin, Nesterenko : généraliser aux K-groupes de Milnor pour anneaux locaux.
- Beilinson, Lichtenbaum : conjectures concernant l'exsistence d'une théorie de cohomologie motivique.
- Conjecture de Beilinson : Relation à K-théorie de Milnor :

$$\mathscr{K}_n^M \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_{\mathrm{mot}}^{n,n}.$$

- Construction d'une théorie motivique : avec le groupes de Chow supérieurs de Bloch (80's) et avec le complex de Voevodsky (90's).
- Elle satisfait :
  - la conjecture de Gersten.
  - la conjecture de Beilinson pour un corps.

Cela mène à : pour un anneau semi-local A de corps résiduels infinis, $X = \operatorname{Spec} A$ on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n^M(A) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_n^M(x) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_{\mathrm{mot}}^{n,n}(A) \arrow[r] & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \mathrm{H}_{\mathrm{mot}}^{n,n}(x) \arrow[r] & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}_{\mathrm{mot}}^{n-1,n-1}(x) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2}$$

exacte, sauf possiblement à $K_n^M(A)$.

3 Enoncé de la conjecture de Gersten

Vu le diagramme (2) l'énoncé suivant paraît naturel.

Théorèm 3.1. ***(Kerz)*** *Soit X un schéma excellent, régulier, contenant un corps, de corps résiduels infinis (ou «assez grand ») alors le complex de Gersten pour la K-théorie de Milnor (1) est exacte.*

4 Applications

- La formule de Bloch – soit X comme dans le théorème, alors, $\mathrm{H}^n(X, \mathscr{K}_n^M) \cong \mathrm{CH}^n(X)$.
- La conjecture de Beilinson – sur la catégorie de schémas lisses sur un corps infinis il existe un isomorphisme $\mathscr{K}_n^M \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}_{\text{mot}}^{n,n}$.

5 Rappels et définitions

5.1 La K-théorie de Milnor

Cas de corps. Soit F un corps quelconque et $T(F^*)$ l'alg'ebre tensoriel sur $\mathbb{Z}$ de F^*. On denote $\mathfrak{I}$ l'idéal engendré par les éléments $a \otimes (1-a)$ où $a, 1-a \in F^*$. Ses élements s'appellent les relation de Steinberg. On définit la K-théorie de Milnor comme le quotient

$$K_*^M(F) = T(F^*)/\mathfrak{I}.$$

On note l'image de $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ par $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Quelques propriétés :

- $K_0^M(F) = \mathbb{Z}$, $K_1^M(F) = F^*$.
- Pour une extension de corps $F \hookrightarrow E$, $\Rightarrow$ un morphisme naturel $K_*^M(F) \to K_*^M(E)$.
- C'est un anneau **anticommutatif**.
- Pour $a, a_i \in F^*$ avec $a_1 + \cdot s a_n = 1$ ou 0

$$\begin{aligned} \{a, -a\} &= \{a, -1\} \\ \{a_1, \ldots, a_n\} &= 0 \end{aligned}$$

- **Morphisme de spécialisation.** Soit (F, ν) un corps non-archimédean, A son anneau de valuation, π un premier dans A, alors il existe un morphisme de groupe unique

$$K_n^M(F) \xrightarrow{\partial} K_{n-1}^M(A/\pi)$$

t.q. pour $u_i \in A^*$

$$\partial(\{u_1, \ldots, u_n\}) = 0 \quad \text{et} \quad \partial(\{\pi, u_2, \ldots, u_n\}) = \{\overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n\}.$$

- **La suite de Milnor.** Avec ∂ comme avant, la suite

$$0 \to K_n^M(F) \to K_n^M(F(t)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{\substack{\pi \in F[t] \\ \text{irr, monique}}} K_{n-1}^M(F[t]/\pi) \to 0$$

est exacte et scindée.

Cas d'anneaux. Pour un anneaux A unitaire commutatif on définit la K-théorie de Milnor de la même façon.

$$K_*^M(A) = T(A^*)/\text{Steinberg}.$$

Soit de plus $\mathscr{K}_*^M$ le faisceau de Zariski associé au pré-faisceau

$$U \mapsto K_*^M(\Gamma(U, \mathscr{O})).$$

Cependant cela ne donne qu'une «bonne »théorie pour les anneaux locaux. Et même dans ce cas, il faut traîter le cas d'un corps résiduel fini de façon différente. alors on suppose ici que tout les anneaux soient semi-locaux de corps résiduels infinis. Quelque propriétés :

– A semi-local, B une localisation de A. Pour $a, a_1, a_2 \in B^*$

$$\{a, -a\} = 0 \quad \text{et} \quad \{a_1, a_2\} = -\{a_2, a_1\}.$$

– Pour $a_1, \dots, a_n \in A^*$ tq. $a_1 + \cdots + a_n = 1$

$$\{a_1, \dots, a_n\} = 0.$$

– $a_1, a_2, a_1 + a_2 \in B^*$

$$\{a_1, a_2\} = \left\{a_1 + a_2, -\frac{a_2}{a_1}\right\}.$$

5.2 La théorie de cohomologie motivique

Définition en terme de groupe de Chow supérieurs de Bloch : dans le cas où X/k lisse, séparé, k parfait cette définition équivaut à celle de Voevodsky.

Soit

$$\Delta^n = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]/(\sum t_i - 1)$$

le n-simplexe algébrique,

$$z^r(X, i)$$

le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés irreductible de $X \times \Delta^i$ de codim r rencontrant tous les faces proprement,

$$z^r(X, *)$$

le complexe de chaînes associé. Le complexe

$$\mathbb{Z}(r) := z^r(X, 2r - *)$$

calcule la cohomologie motivique

$$\mathrm{H}^{i.r}_{\mathrm{mot}}(X) := \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Z}(r))$$

– Les groupes de cohomologie motivique sont triviaux pour $i > 2n$ et $i > n + \dim X$.
– Il y a une suite de localisation.
– La théorie motivique est continue sur les anneaux réguliers.
– Elle satisfait la conjecture de Gersten.
– Elle satisfait la conjecture de Beilinson pour un corps.

6 Idée de démonstration

La conjecture de Gersten se déduit du théorème principal suivant.

Théorèm 6.1. *Soit A un anneau régulier, semi-local, connexe, contenant un corps, de corps résiduels infinis, F son corps de fractions. Pour tout n l'application naturelle*

$$i_n : K_n^M(A) \to K_n^M(F)$$

est universellement injective.

Ici, «universellement injective»s'explique avec la définition de «universellement exacte».

Définition 6.2. Une suite

$$A' \to A \to A''$$

de groupes abéliens est dite universellement exacte si la suite

$$F(A') \to F(A) \to F(A'')$$

est exacte pour tout foncteur $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, où $\mathscr{B}$ est une categorie abélien satisfaisant la propriété $(\mathbf{AB}5)$ de Grothendieck, qui commute aux limites filtrantes perites.

Le preuve s'effectue en deux pas, on a besoin de trois nouveaux résultats en K-théorie.

1. Réduire au cas où A est semi-local par rapport à des points fermés d'une variétés lisse sur un corps parfait infini. On utilise :
   – Théorème de normes (Kerz).
   – Désingularisation de Popescu.
2. On applique récurrence sur $d = \dim A$. On a besoin de
   – Suite de Milnor généralisée (Kerz).
   – Un carré co-cartésien (Kerz).

Pour la démonstration de la conjecture de Gersten :

1. Le cas essentiellement lisse : utiliser le diagramme (2) et le théor'eme principal.
2. Le cas général : se éduit de cas lisse avec la méthode de Panin.

7 Démonstrations

Comme les démontrations des trois résultats utilisés pour démontrer le théorème principal contiennent des calculations pénibles, on va les supposer et se borne à montrer le théorème principal et la conjecture de Gersten.

D'abord on va donner ces trois résultats.

Théorèm 7.1. *Soit $A \subset A'$ une extension d'anneaux semi-locaux factoriels de corps résiduels infinis, f et $f_1 \neq 0$ dans A tels que $f_1 | f$ et $A/f \cong A/f_1$. Alors le diagram*

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(A_{f_1}) & \longrightarrow & K_n^M(A_f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_n^M(A'_{f_1}) & \longrightarrow & K_n^M(A'_f) \end{array}$$

est co-cartésien.

Motivé par un résultat similair en théorie motivique.

Théorèm 7.2. *Soit A un anneau semi-local, de corps résiduels infinis, F son corps de fractions, alors il ya une suite exacte scindée*

$$0 \to K_n^M(A) \to K_n^t(A) \to \bigoplus_{\substack{\pi \in A[t] \\ irr,\ monique}} K_{n-1}^M(A[t]/\pi) \to 0$$

Le groupe $K_n^t(A)$ peut être regardé comme un «sous-groupe»de $K_n^M(F(t))$ engendré par les symboles $\{p_1, \dots, p_n\}$, $p_i \in A[t]$ premier l'un de l'autre, les coefficients maximaux inversibles.

On a un résultat similaire

$$0 \to K_n^M(A) \to K_n^t(A, q) \to \bigoplus_{\substack{\pi \in A[t]\ ,(\pi,q)=1 \\ \text{irr, monique}}} K_{n-1}^M(A[t]/\pi) \to 0$$

où on reclame aussi que les p_i soit premier à un polynôme monique q.

Théorèm 7.3. *Soit $A \subset B$ une extension finie étale d'anneaux semi-locaux de corps résiduels infinis. Alors il existe une norme*

$$N_{B/A} : K_n^M(B) \to K_n^M(A)$$

qui satisfait une formule de projection et est compatible au changement de base.

Maintenant on peut démontrer le théorème principal.

Démonstration : **Cas 1 :** injectivité ordinaire, k infini et parfait, A l'anneau semi-local associé à un ensemble de points fermés d'une variété lisse affine X/k de $\dim X = d$.

Récurrence sur d. $d = 0$ trivial. Pour $d \geqslant 1$:

1. Remplacer le corps de fraction par la localisation à un seul élément. Suffisant de montrer que i_n : $K_n^M(A) \to K_n^M(A_f)$ est injectif.

2. Par un théorèm de Gabber, réduire au cas où $X = {}^d_k$: Avec ce méthode on obtient un anneau semi-local A' associé à un ensemble de points fermés $y_1, \dots, y_l$ de ${}^d_k$, $A' \subset A$ extension locale, $f' \in A'$ tq. $f'|f$ et $A'/f' = A/f$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} K_n^M(A') \arrow[r] \arrow[d] & K_n^M(A'_{f'}) \arrow[d] \\ K_n^M(A) \arrow[r] & K_n^M(A_f) \end{tikzcd}$$

est co-cartésien, alors il suffit de démontrer l'injectivité pour l'application en haut. Et plus facil, il suffit de démontrer l'injectivité pour

$$i' : K_n^M(A') \to K_n^M(k(t_1, \dots, t_d)).$$

3. Réduction de la dimension. Soit $x \in \mathrm{Ker}(i')$, et $p_1, \dots, p_m \in k[t_1, \dots, t_d]$ les polynômes irreductible dans x. Soit

$$W = \left(\bigcup_i \mathrm{sing}(V(p_i)) \right) \cup \left(\bigcup_{i \neq j} V(p_i) \cap V(p_j) \right).$$

Comme k est parfait, $\dim W < d - 1$. Par une généralisation de Normalisation de Noether, il existe une projection linéaire

$$p : {}^d_k \to {}^{d-1}_k$$

telle que $p\big|_{V(p_i)}$ soit finie et $p(y_i) \notin p(W)$ pour tout i.
Soit A'' l'anneau semi-local associé aux points $p(y_i)$, on a

$$A'' \subset A''[t] \subset A'$$

On choisit $q \in A''[t]$ monique tq

$$v(q) \cap p^{-1}(p(y_i)) = \{y_1, \dots, y_l\} \cap p^{-1}(p(y_i))$$

contiens les y_j dans la fibre sur y_i. Il suit que $(q, p_i) = 1$ et alors si on considère $K_n^t(A'', q) \to K_n^M(A')$, il suit que x a un préimage x' dans $K_n^t(A'', q)$.

4. On a un diagram commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_n^M(A'') \arrow[r] \arrow[d] & K_n^t(A'', q) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_\pi K_{n-1}^M(A''[t]/\pi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_n^M(F) \arrow[r] & K_n^M(F(t)) \arrow[r] & \oplus_\pi K_{n-1}^M(F[t]/\pi) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Une chasse de diagramm montre que $x' = 0$ donc $x = 0$

Cas 2 : Généraliser au cas où A est un anneau semi-local associé à un ensemble de points (pas nécessairement fermés) sur une variété lisse affine sur k parfait et infini.

Cas 3 : Mm̂e qu'avant seulement maintenant universellement injective. L'injectivité suffit pour montrer la conjecture de Beilinson pour le cas d'un anneau comme dans l'hypothèse

$$K_n^M(A) \to \mathrm{H}^{n,n}_{\mathrm{mot}}(A).$$

Par conséquence, on peut utiliser la cohomologie motivique maintenant. Et pour celle-ci, le morphisme

$$\mathrm{H}^{n,n}_{\mathrm{mot}}(A) \to \mathrm{H}^{n,n}_{\mathrm{mot}}(F)$$

est universellement injectif.

Cas 4 : Cas général. D'après la désingularisation de Popescu A est limite inductive filtrante d'anneaux lisses, semi-locaux de type géométrique sur un corps premier k_0 et les corps résiduels infinis. Si k_0 est de caractéristique positive on utilise la norme.

Soit k_1 la clôture algébrique de k_0. On choisit une tour d'extensions finies $k_1 \subset k_2 \cdots \subset k_\infty$ tel que $\dim_{k_i} k_{i+1}$ soit $p = 2$ ou 3. On dispose de normes

$$N : K_n^M(A \otimes_{k_i} k_{i+1}) \to K_n^M(A \otimes_{k_1} k_i)$$

et on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} K_n^M(A \otimes_{k_1} k_\infty) \arrow[r] & K_n^M(F \otimes_{k_1} k_\infty) \\ K_n^M(A) \arrow[r] \arrow[u] & K_n^M(F) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

L'application en haut est universellement injectif et alors celle en bas l'est aussi.

□

Maintenant, on est en mésure de montrer la conjecture de Gersten.

Démonstration : **Cas lisse.** Dans ce cas le complexe de Gersten est exacte pour la cohomologie motivique et on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{K}_n^M\big|_X \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{x \in X^{(0)}} K_n^M(x) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \oplus_{x \in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^{n,n}\big|_X \arrow[r] & \oplus_{x \in X^{(0)}} H^{n,n}(x) \arrow[r] & \oplus_{x \in X^{(1)}} H^{n-1,n-1}(x) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

On a exactitude en bas et d'après Gabber et Elbaz-Vincent/Müller-Stach le complexe en haut est exacte à la deuxième place. Il reste à montrer l'exactitude à la première place. Localement on a avec le théorème principale

$$K_n^M(A) \to K_n^M(F)$$

est universellement injective. Cela montre l'injectivitè de $\mathscr{K}_n^M(X) \to \oplus_{x \in X^{(0)}} K_n^M(x)$.

Cas général. On le déduit du cas lisse par la méthode de Panin.

□