Le but de cet exposé est de calculer le complexe de deRham-Witt et plus important, la cohomologie associée, pour l'espace affine. On va en déduire le complexe et la cohomologie surconvergente.

1 Le complexe de deRham-Witt

Etant donné que $X = \mathrm{Spec}(k[x_1, \ldots, x_N])$ est de dimension N, on recourt à la Proposition I.3.7 de Illusie [5] :

Proposition 1.0.1. *(a) Si X est de dimension relative $\leqslant N$, on a $W_\bullet\Omega^i_X = 0$ pour $i > N$.*

(b) Si X est purement de diemnsion relative N, alors, pour tout n, $F : W_n\Omega^N_X \to W_{n-1}\Omega^N_X$ est surjective.

Démonstration : This is a local question, so without loss of generality we may assume $X = \mathrm{Spec}(A)$ with $A = k[T_1, \ldots, T_N])$ Let $E = E_A$ be the complex of corresponding entire forms. There is an isomorphism

$$W_\bullet\Omega^\bullet_A \xrightarrow{\cong} E.$$

The definition of E thus induces (a). By a similar reasoning for (b) it suffices to show that the endomorphism F on E^N is surjective. Recall that E^N is the subobject of $W[(T_i^{p^{-\infty}})_{1\leqslant i\leqslant N}]d\log T_1 \cdots d\log T_N$ given by the sum of G-homogenous components of totally positive degree (denoted by a $+$-sign). This is enough to show the claim. □

Remarque 1.0.2. Par conséquent, l'endomorphisme F du pro-objet $W_\bullet\Omega^N_X$ est en fait un automorphisme.

En particulier, le complexe de deRham-Witt dans notre cas est de la forme

$$0 \to W\Omega^0_X \xrightarrow{d} W\Omega^1_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} W\Omega^N_X \to 0.$$

Pour calculer les composantes de ce complexe, on utilise d'abord la définition par réccurrence donnée dans [5, I.1] et ensuite on se servira de la filtration développée dans [5, I.3].

On sait que

$$W\Omega^0_X = W\mathscr{O}_X,$$

et que

$$W_1\Omega^\bullet_X = \Omega^\bullet_X.$$

En outre on est donné une fltration pour $n, r \in \mathbb{Z}$ par

$$\mathrm{Fil}^n\, W_r\Omega^\bullet_X = \begin{cases} W_r\Omega^\bullet_X & \text{si} \quad n \leqslant 0 \quad \text{où} \quad r \leqslant 0 \\ \mathrm{Ker}\, R^{r-n} : W_r\Omega^\bullet_X \to W_n\Omega^\bullet_X & \text{si} \quad 1 \leqslant n < r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant la limite projective sur r, cela induit de façon évidente une filtration sur $W\Omega^\bullet_X$. Cela vient avec une gradation par les quotients s'enchaînants et le système projectif associé est essentiellement constant : pour $n \geqslant n+1$ les flèches canoniques

$$\mathrm{gr}^n\, W\Omega^\bullet_X \to \mathrm{gr}^n\, W_r\Omega^\bullet_X \to \mathrm{gr}^n\, W_{n+1}\Omega^\bullet_X = \mathrm{Fil}^n\, W_{n+1}\Omega^\bullet_X$$

sont des isomorphismes.

Donc, pour calculer $W\Omega^i_X$ pour $0 < i \leqslant N$ il suffit donc de calculer $\mathrm{gr}^n\, W\Omega^i_X$, ce qui revient au même de calculer $\mathrm{Fil}^n\, W_{n+1}\Omega^i_X$. On va utiliser la proposition suivante, en particulier dans le cas $r = n+1$.

Proposition 1.0.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Fil}^n\, W_r\Omega^\bullet_X$ est l'idg de $W_r\Omega^\bullet_X$ engendré par $V^nW_{r-n}(\mathscr{O}_X)$ et L'on a pour tout i :*

$$\mathrm{Fil}^n\, W_r\Omega^i_X = V^nW_{r-n}\Omega^i_X + \underline{d}V^nW_{r-n}\Omega^{i-1}_X.$$

Démonstration : The proof is also done locally and uses the definition of E as above. $\square$

En conséquence on a

$$\operatorname{gr}^n W\Omega^i_X = V^n W_1\Omega^i_X + \underline{d}V^n W_1\Omega^{i-1}_X. \tag{1}$$

Le problème est que ce n'est pas a priori une somme directe. Mais suivant les arguments d'Illusie, on obtient une suite exacte

$$0 \to F^{n+1}_*\Omega^i_X/\,\mathrm{B}_n\,\Omega^i_X \xrightarrow{V^n} \operatorname{gr}^n W\Omega^i_X \to F^{n+1}_*\Omega^{i-1}_X/\,\mathrm{Z}_n\,\Omega^{i-1}_X \to 0,$$

ou moins canoniquement

$$0 \to \Omega^i_X/\,\mathrm{B}_n\,\Omega^i_X \xrightarrow{V^n} \operatorname{gr}^n W\Omega^i_X \to \Omega^{i-1}_X/\,\mathrm{Z}_n\,\Omega^{i-1}_X \to 0.$$

Maintenant il faut calculer B_n et Z_n :
la définition est :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{B}_0\,\Omega^i_X &=& 0\\
\mathrm{B}_1\,\Omega^i_X &=& \mathrm{B}\,\Omega^i_X\\
\mathrm{B}_n\,\Omega^i_{X^{(p)}} &\xrightarrow{C^{-1}}& \mathrm{B}_{n+1}\,\Omega^i_X/\,\mathrm{B}_1\,\Omega^i_X\\
\mathrm{Z}_0\,\Omega^i_X &=& \Omega^i_X\\
\mathrm{Z}_1\,\Omega^i_X &=& \mathrm{Z}\,\Omega^i_X\\
\mathrm{Z}_n\,\Omega^i_{X^{(p)}} &\xrightarrow{C^{-1}}& \mathrm{Z}_{n+1}\,\Omega^i_X/\,\mathrm{B}_1\,\Omega^i_X
\end{array}$$

Pour $i = 1$ on calcule :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{B}_n\,\Omega^1_X &=& \{df(x_{1,i},\ldots,x_{N,i})|1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{où } x_{ji} = x_j^{p^i}\}\\
\mathrm{Z}_n\,\Omega^0_X &=& k
\end{array}$$

Je ne sais pas comment faire pour $i > 1$. Mais peut-être on n'en a pas besoin pour calculer la cohomologie. Pour l'instant on a

$$\begin{array}{rcl}
W\Omega^0_X &=& W\,\mathscr{O}_X = W(k[x_1,\ldots,x_N]\\
W\Omega^1_X &=& \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V^n W_1\Omega^1_X + \underline{d}V^n W_1\Omega^0_X = \sum_{n=1}^{\infty} V^n\Omega^1_X + \underline{d}V^n\,\mathscr{O}_X\\
&=& \{(f_{1n}dx_1 + \cdots f_{Nn}dx_N)_n + \underline{d}(g_n)_n\}\\
&\vdots&\\
W\Omega^N_X &=& \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V^n W_1\Omega^N_X + \underline{d}V^n W_N\Omega^0_X = \sum_{n=1}^{\infty} V^n\Omega^N_X + \underline{d}V^n\Omega^{N-1}_X\\
&=& \displaystyle\{(f_n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N)_n + \underline{d}(\sum_{i=1}^{N} g_{in}dx_1 \wedge \cdots \hat{dx_i} \cdots \wedge dx_N)_n\}
\end{array}$$

2 La cohomologie de deRham-Witt

Pour determiner la cohomologie de deRham-Witt, il faut que l'on connaisse l'image et le noyau des différentielles $\underline{d}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ le noyau est donné par

$$\operatorname{Ker}(\underline{d} : W_n\Omega^i_X \to W_n\Omega^{i+1}_X) = F^n W_{2n}\Omega^i_X.$$

Mais : est-ce que cela commute à la limite ? Et comment comprendre cette expression ? L'image de $\underline{d}$ contient $\underline{d}V^n\Omega_X^{i-1}$, mais comme la somme 1 n'est pas forcément directe, il faut considérer l'intersection

$$V^n\Omega_X^i \cap \underline{d}V^n\Omega_X^{i-1} \overset{\cong}{\longleftarrow} \mathrm{Z}_n\,\Omega_X^{i-1}/\,\mathrm{Z}_{n+1}\,\Omega_X^{i-1} \overset{\cong}{\longrightarrow} \mathrm{B}_{n+1}\,\Omega_X^i/\,\mathrm{B}_n\,\Omega_X^i.$$

D'abord $N=1$. Pour $i=0$, on a $\mathrm{gr}^n\, W\Omega_X^0 = V^n\Omega_X^0$ et $\mathrm{Ker}\,\underline{d} = W(k)$ (je pense), donc

$$\mathbb{H}^0(W\Omega_X^\bullet) = \mathrm{Ker}\,\underline{d} = \lim F^n W_{2n}(k[x]) = W(k).$$

Cela coinciderait avec les résultats de [3] considérant l'application de comparaison à la cohomologie cristalline. Pour $i=1$, la somme 1 est en fait directe car $\mathrm{Z}_n\,\Omega_X^0 = k$.

$$\mathbb{H}^1(W\Omega_X^\bullet) = \mathrm{Ker}\,0/\,\mathrm{Im}\,\underline{d} \cong W(k[x]).$$

Pour $N>1$, je ne sais pas encore. D'après [3] on devrait expecter

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0 & = & W(k) \\ \mathrm{H}^i & = & 0 \quad \text{pour} \quad 0<i<N \\ \mathrm{H}^N & = & \text{infinite, not a torsion abelian group, not separated for } p\text{-adic topology} \end{array}$$

C'est pourquoi cohomologie cristalline n'est pas bien si X n'est pas propre ou singulier. Pour le cas propre, la cohomologie de deRham-Witt surconvergente devrait marcher. Je pense que l'on a encore $\mathrm{H}^0 = W(k)$ et $\mathrm{H}^i = 0$ pour $0<i<N$ mais $\mathrm{H}^N = W^\dagger(k[x_1,\ldots,x_N])$.

D'accord, $N=2$. Soit $X = \mathrm{Spec}(k[x,y])$. Le complexe de deRham-Witt est de la forme

$$0 \to W\Omega_X^0 \xrightarrow{\underline{d}_1} W\Omega_X^1 \xrightarrow{\underline{d}_2} W\Omega_X^2 \to 0.$$

Pour $i=0$ on a

$$\begin{array}{rcl} W\Omega_X^0 & = & W(k[x,y]), \\ \mathrm{Im}(0) & = & 0, \\ \mathrm{Ker}(\underline{d}_1) & = & W(k), \\ \mathbb{H}^0(W\Omega_X^\bullet) = W(k). & & \end{array}$$

Pour $i=1$ le cran n de $W\Omega_X^1$ est donnée par

$$V^n\Omega_X^1 + \underline{d}_1V^n\Omega_X^0,$$

et la somme est en fait directe :

$$V^n\Omega_X^1 \cap \underline{d}_1V^n\Omega_X^0 = \mathrm{Z}_n\,\Omega_X^0/\,\mathrm{Z}_{n+1}\,\Omega_X^0 = \mathrm{B}_{n+1}\,\Omega_X^1/\,\mathrm{B}_n\,\Omega_X^1,$$

avec $\mathrm{B}_1\,\Omega_X^0 = \mathrm{B}\,\Omega_X^0 = 0$ et $\mathrm{Z}_1\,\Omega_X^0 = \mathrm{Z}\,\Omega_X^0 = k$ par réccurrence :

$$k = \mathrm{Z}_n\,\Omega_X^0 \cong \mathrm{Z}_n\,\Omega_{X^{(p)}}^0 \cong \mathrm{Z}_{n+1}\,\Omega_X^0/\,\mathrm{B}_1\,\Omega_X^0.$$

Cela est aussi en correspondence avec [5, Prop.0.2.2.8(c)]. Donc il suffit de montrer que

$$\mathrm{Ker}\,\underline{d}_2 \cap V^n\Omega_X^1 = 0$$

pour montrer que le complexe est exacte à 1, c'est-à-dire, $\mathrm{Ker}\,\underline{d}_2 = \mathrm{Im}\,\underline{d}_1$. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}\,\underline{d}_2 & = & F^{n+1}W_{2n+2}\Omega_X^1 \\ & = & F^{n+1}(V^{2n+2}\Omega_X^1 + \underline{d}_1V^{2n+2}\Omega_X^0 \\ & = & p^{n+1}\Omega_X^1 + F^{n+1}\underline{d}_1V^{n+1}\Omega_X^0. \\ F^{n+1}W_{2n+2}\Omega_X^1 \cap V^nW_1\Omega_X^1 & = & 0. \end{array}$$

Mais j'en suis pas sûre...

Pour $i = 2$: le cran n de ce group est encore $V^n\Omega^2_X + \underline{d}_2 V^n\Omega^1_X$. Il est claire que $\operatorname{Ker}\underline{0} = W\Omega^2_X$. Donc il faut calculer $\operatorname{Im}\underline{d}_1$ – la question est quelle est l'intersection de $V^n\Omega^2_X \cap \underline{d}_2 V^n\Omega^1_X$.

$$V^n\Omega^2_X \cap \underline{d}_2 V^n\Omega^1_X = \mathrm{Z}_n\,\Omega^1_X / \mathrm{Z}_{n+1}\,\Omega^1_X = \mathrm{B}_{n+1}\,\Omega^2_X / \mathrm{B}_n\,\Omega^2_X.$$

On sait [5, Prop.0.2.2.8(a)] que $\mathrm{B}_n\,\Omega^2_X$ est engendré comme k-module par les sections de la forme $x^{p^r-1}y^{p^r-1}dx\wedge dy$ avec $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Par conséquence comme k-module

$$\mathrm{B}_n\,\Omega^2_X \cong k^n,$$

et le quotient en question est donné par

$$\mathrm{B}_{n+1}\,\Omega^2_X / \mathrm{B}_n\,\Omega^2_X \cong k.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{H}^2(W\Omega^\bullet_X) = \operatorname{Ker} 0 / \operatorname{Im}\underline{d}_2 \cong W(k[x,y])/W(k).$$

Je viens de découvrir une description de $W\Omega_{A[x]}$ en termes de $W\Omega_A$ par Lars Hesselholt et Ib Madsen [4]. Dans cette construction il s'avère que le complexe de deRham-Witt dans le cas affine est exacte en dehors de 0 et N. Cela se montre par réccurrence. Pour $X = \operatorname{Spec}(k[x_1,\ldots,x_N])$ on a toujours

$$\mathbb{H}^0(W\Omega^\bullet_X) = \operatorname{Ker}\underline{d}_1 = W(k).$$

Et d'après que l'on vient de dire

$$\mathbb{H}^i(W\Omega^\bullet_X) = \operatorname{Ker}\underline{d}_{i+1} / \operatorname{Im}\underline{d}_i = 0, \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1.$$

Pour $N \geqslant 2$ (il est évident pourquoi $N = 1$ est une exception) la calculation de la top-cohomologie est exactement enalogue au cas $N = 2$ déjà effectué plus haut, ce qui nous donne

$$\mathbb{H}^N(W\Omega^\bullet_X) = \operatorname{Ker} 0 / \operatorname{Im}\underline{d}_N \cong W(k[x_1,\ldots,x_N])/W(k).$$

Références

[1] Davis, C. : *The Overconvergent deRham-Witt Complex.* Thesis, (2009).

[2] Davis, C. ; Langer, A. ; Zink, T. : *Overconvergent deRham-Witt Cohomology.* Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 44, No. 2, 197-262 (2011).

[3] de Jong, J. : *Crystalline cohomology.* In Stacks Project, version 7ec29b2, http ://www.math.columbia.edu/algebraic_geometry/stacks-git/crystalline.pdf, (2012).

[4] Hesselholt, L. ; Madsen, I. : *On the de Rham-Witt complex in mixed characteristic.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 37, 1-43, (2004).

[5] Illusie, L. : *Complex de deRham-Witt et cohomologie cristalline.* Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 12, No. 4, 501-661 (1979).

[6] Kedlaya, K.S. : *p-adic cohomology.* arXiv :math/0601507v2 [math.AG], (2008).

[7] Kedlaya, K.S. : *Topics in algebraic Geometry (rigid analytic geometry).* http ://www-math.mit.edu/~kedlaya/18.727/notes.html, (2004).

[8] van der Put, M. : *The cohomology of Monsky and Washnitzer.* Mémoires de la Société Mathématique de France, Nouvelle Série (23) : 33-59, (1986).

[9] Zink, T. :*Lectures on p-divisible groups.* http ://www.math.uni-bielefeld.de/∼zink/V-DFG.html, (2011/2012).