Catégories derivées se présentent comme localisatins de catégories homotopiques. Donc on commence par définir celles-ci.

1 Catégories homotopiques

Définition 1.0.1. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. On denote $C(\mathscr{A})$ la catégorie abélienne de complexes dans $\mathscr{A}$ avec morphismes de complexes et $K(\mathscr{A})$ la catégorie de complexes dans $\mathscr{A}$ où maintenant les morphisme sont classes d'homotopies de morphismes de complexes.

Il est claire comment définir des complexes bornés (en haut, en bas, en général). Il y a un foncteur naturel $C(\mathscr{A}) \to K(\mathscr{A})$. La catégorie $K(\mathscr{A})$ n'est pas forcément abélienne, mais on a le résultat suivant :

Lemme 1.0.2. *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Alors $K(\mathscr{A})$ est additive et le foncteur $C(\mathscr{A}) \to K(\mathscr{A})$ est additif.*

Démonstration : Trivialement $K(\mathscr{A})$ possède d'un objet de zéro.

Soit X, Y deux complexes dans $\mathscr{A}$. Comme $C(\mathscr{A})$ est abélienne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{C(\mathscr{A})}(X, Y)$ est un groupe abélien et la composition de deux morphisme est bilinéaire. Il faut montrer que le quotient de ce groupe par la relation d'équivalence mentionné dans la définition soit bien défini. En effet, si $f, g \simeq 0$, alors $f + g \simeq 0$ et $-f \simeq 0$. Bilinéarité est claire.

Maintenant, $\mathrm{Hom}_{K(\mathscr{A})}(X, Y)$ étant un quotient bien défini de $\mathrm{Hom}_{C(\mathscr{A})}(X, Y)$ pour tous X, Y le foncteur naturel $C(\mathscr{A}) \to K(\mathscr{A})$ induit un morphism de groupes abéliens en $\mathrm{Hom}_{C(\mathscr{A})}(X, Y)$. Il est alors additif.

Étant donné que $C(\mathscr{A})$ est abélienne donc additive et donc possède tous les bi-produits finis, le même est vrai pour $K(\mathscr{A})$. □

Définition 1.0.3. Soit $u : X \to Y$ un morphisme de complexes. Le cône C_u de u est le complexe défini pour $n \in \mathbb{Z}$ par $C_u^n = X^{n+1} \oplus Y^n$ avec le differentiel

$$\partial_Z^n = \begin{pmatrix} -\partial_X^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} & \partial_Y^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1}$$

Il y a des morphismes canoniques, l'injection $v : Y \to C_u$ et la projection $w : C_u \to X[1]$. Donc on a un diagramme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} X[1].$$

On denote $k = w\,[-1] : C_u\,[-1] \to X$. Quelques résultats importants :

Proposition 1.0.4. *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, $u : X \to Y$ un morphisme de complexes, $v : Y \to C_u$, $k : C_u\,[-1] \to X$ comme plus haut.*

1. *Un morphisme de compelxes $m : Y \to Q$ se factorise à travers de v ssi $mu \simeq 0$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "m"'] & C_u \arrow[d, dotted] \\ & Q \end{tikzcd}$$

2. *Un morphisme de complexes $m : Q \to X$ se factorise à travers de k ssi $um \simeq 0$.*

$$\begin{tikzcd} C_u\,[-1] \arrow[r, "k"] & X \\ Q \arrow[u, dotted] \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Il y a aussi des homotopies canoniques $vu \simeq 0$ et $uk \simeq 0$.

DÉMONSTRATION : This is just going through the definitions. Maybe later. □

Corollaire 1.0.5. *Soit $\mathscr{A}$ comme avant, $f, g : X \to Y$ des morphismes de complexes. Alors $f \simeq g$ ssi $f - g$ se factorise à traversle cône $X \to C_{\mathrm{id}}$ de l'identité de X.*

DÉMONSTRATION : $f - g : X \to Y$ (où le X ici est le Y de la Proposition 1.0.4(1) et le Y ici est le Q de la Proposition 1.0.4(1)) se factorise à travers de $X \to C_{\mathrm{id}}$ ssi $(f-g) = (f-g) \circ \mathrm{id} \approx 0$ ce qui est le même de dire $f \approx g$. □

Consider the definition of the "normal" kernel and cokernel : The cokernel of a morphism $f : X \to Y$ in some category is an object Q and a morphism $q : Y \to Q$ such that the composition $q \circ f$ is the zero morphism of the category, and furthermore q is universal with respect to this property. Similarly, the kernel of a a morphism $f : X \to Y$ is an object K and a morphism $k : K \to X$ such that the composition $f \circ k$ is the zero morphism of the category, and k is universal with respect to that property.

Donc, il fait du sense de voir $v : Y \to C_u$ comme conoyau homotopique et $k : C_u[-1] \to X$ comme noyau homotopique de $u : X \to Y$. Il est notable que – contrairement au noyau et conoyau usuel – le conoyau et noyau homotopique vient du même objet C_u. Le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} X[1]$ fournit toute information importante de u.

On définit aussi l'image et la co-image homotopique :

Définition 1.0.6. Toutes les notations comme plus haut. Le cône de $k : C_u[-1] \to X$ est le cylindre de u, $\widetilde{C}_u = C_k$ et le morphisme canonique $\widetilde{u} : X \to \widetilde{C}_u$ (le conoyau homotopique de k) est dit la co-image homotopique de u. pour le côn de $v : Y \to C_u$, soit $\widehat{C}_u = C_v[-1]$ et le conoyau homotopique de v, $\widehat{u} : \widehat{C}_u \to Y$ est dit l'image homotopique de u.

Il y a des équivalence d'homotopie

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{C}_u & \to & Y \\ X & \to & \widehat{C}_u \end{array}$$

et on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C_u[-1] \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[r] & C_u \\ & \widetilde{C}_u \arrow[ur] & \widehat{C}_u \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

We will mention and/or prove other results and definitions as we go if needed.

Définition 1.0.7. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne $f, g : X \to Y$ des morphismes de complexes et $\Sigma, \Theta : f \to g$ des homotopies. Une 2-homotopie $\vartheta : \Sigma \to \Theta$ est une collection de morphismes $\vartheta^n : X^n \to Y^{n-2}$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\Theta^n - \Sigma^n = \partial_Y^{n-2} \vartheta^n - \vartheta^{n+1} \partial_X^n.$$

Dans ce cas, Σ et Θ sont dits homotopique $\Sigma \approx \Theta$.

On peut montrer que c'est une relation d'équivalence. On a le théorème suivant :

Théorème 1.0.8. *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Étant donné un diagramme de complexes, les suites horizontales exactes, pas forcément commutative*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "q'"'] & Q' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

on suppose l'existence d'homotopies $\Sigma : fu \to u'g$ et $\Theta : q'f \to eq$ telles que le homotopies induites $q'\Sigma, \Theta u : q'fu \to 0$ sont homotopiques. Alors on a un diagramme commutative

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^n(Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^n(Q) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathrm{H}^{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(X') \arrow[r] & \mathrm{H}^n(Y') \arrow[r] & \mathrm{H}^n(Q') \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^{n+1}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

L'existence de Σ et Θ avec les propriétés mentionnées n'est pas du tout trop restrictive pour notre but car

Proposition 1.0.9. *Soit $\mathscr{A}$ comme avant, C, D des complexes positifs, C acyclique et D injectif. Si $\varphi, \psi : C \to D$ sont des morphismes de complexes, $\Sigma, \Theta : \psi \to \varphi$ des homotopies. Alors il existe une homotopie $\vartheta : \Sigma \to \Theta$.*

2 Catégories triangulées

Soit toujours dans ce paragraphe $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, tous les complexes des objets dans $C(\mathscr{A})$. On denote par Σ l'automorphisme additif $(\cdot)[1] : K(\mathscr{A}) \to K(\mathscr{A})$.

Pour tout morphisme $u : X \to Y$ le diagramme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} X[1]$$

de $C(\mathscr{A})$ est un triangle de candidat dans $K(\mathscr{A})$, c'est-à-dire, les compositions $v \circ u$, $w \circ v$ et $u[1] \circ w$ sont (homotope à) zéro. (Isn't this called an exact triangle ? ?).

Définition 2.0.10. Un triangle dans $k(\mathscr{A})$ est dit distingué s'il est isomorphe à un triangle de candidat induit par un morphisme de complexes $u : X \to Y$ dans $C(\mathscr{A})$.

Des fois, il est convenient de remplacer Y par le cylindre $\widetilde{C}_u$ de u, ce qui est possible car les deux objets sont homotope. Pourtant il faut montrer que le triangle résultant est encore distingué.

Théorème 2.0.11. *La catégorie additive $K(\mathscr{A})$ avec l'automorphisme additive* [1] *et la class de trianlges distingués forme une catégorie triangulée.*

DÉMONSTRATION : Il y a cinq axiomes à vérifier ... □

Références

[1] GELFAND, S.I. ; MANIN, YU.I. : *Methods of Homological Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).

[2] KELLER B. : *On differential graded categories.* International Congress of Mathematicians Vol. II, 151-190, Eur. Math. Soc., Zürich, (2006).

[3] MURFET D. : *Derived Categories Part I.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategories.pdf, (2006).

[4] MURFET D. : *Derived Categories Part II.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesPart2.pdf, (2006).

[5] MURFET D. : *Derived Categories of Sheaves.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesOfSheaves.pdf, (2006).

[6] MURFET D. : *Derived Categories of Quasi-coherent Sheaves.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesOfQuasicoherentSheaves.pdf, (2006).