On va commencer par discuter la catégorie dérivée de la catégorie $\mathscr{M}(R)$ de R-modules pour R un anneau commutatif, mais ce que l'on dit se généralise sous certains hypothèses aux anneaux commutatifs gradués, et se globalise aux schémas (formels).

1 La catégorie dériveée

Un point de vue de la nécessité des catégories dérivées est que les groupes de cohomologie et leurs relations et comportement ne sont que des ombres de certaines complexes sous-jacents – dans ce contexte les catégories dérivées se présentent de façon naturelle. Le passage d'un complexe à sa cohomologie, rend tout quasi-isomorphisme en un isomorphisme. Il fait donc du sense, au niveau de complexes, de considérer les quasi-isomorphisme comme des isomorphismes. On inverte les quasi-isomorphismes formellement – un processus de localisation formelle.

Sans perte de généralité, on commence par la catégorie homotopique $K(R)$ où les objets sont des complexes de R-modules et les morphisme sont des morphisme de complexes de R-modules à homotopie près. Pour X, C, C' des R-complexes, on considère des $K(R)$-diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ C & & C' \end{tikzcd}$$

où ψ est un quasi-isomorphisme. Pour tout diagramme de cette forme si C est q-injectif, c-à-d $\forall \psi : C \to C_*$ quasi-isomorphisme $\exists$ un inverse homotopique à gauche, il existe un morphisme unique $\varphi_* : C \to C'$ dans $K(R)$ tel que $\varphi_* \circ \psi =$
varphi. Sur l'ensemble de ces diagrammes, on a la relation

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & \sim & & X_1 \arrow[dl, "\psi\circ\psi_1"'] \arrow[dr, "\varphi\circ\psi_1"] & \\ C & & C' & & C & & C' \end{tikzcd}$$

pour un quasi-isomorphisme $\psi_1 : X_1 \to X$. C'est une relation d'équivalence et la classe d'équivalence d'un diagramme est donnée par $\frac{\varphi}{\psi}$. La composition de deux classes de diagrammes $C' \xleftarrow{\psi'} X' \xrightarrow{\varphi'} C''$ et $C \xleftarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} C'$ et donnée par

$$\frac{\varphi'}{\psi'} \circ \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi' \circ \varphi_2}{\psi \circ \psi_2}$$

où $X \xleftarrow{\psi_2} X_2 \xrightarrow{\varphi_2} X'$, ψ_2 un quasi-isomorphisme tel que $\psi'\varphi_2 = \varphi\psi_2$. Bien sûr il faut montrer que des tels morphismes existent.

$$\begin{tikzcd} & & X_2 \arrow[dl, dotted, "\psi_2"'] \arrow[dr, dotted, "\varphi_2"] & & \\ C & X \arrow[l, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dl, "\psi'"] & C'' \\ & & C' & & \end{tikzcd}$$

Définition 1.0.1. La catégorie dérivée sur R, denotée $D(R)$ a pour objets les complexes sur R et les morphismes sont les morphismes de $K(R)$ à la relation d'équivalence décrite près.

Il y a un foncteur canonique $Q : K(R) \to D(R)$ ne changent pas les complexes, mais envoyant un morphisme $\varphi : C \to C'$ de $K(R)$ vers la classe $\frac{\varphi}{\mathrm{id}_C}$. Ce morphisme envoie les quasi-isomorphismes de $K(R)$ vers les isomorphismes de $D(R)$, si φ est un quasi-isomorphisme dans $K(R)$, alors l'inverse de la classe $\frac{\varphi}{\mathrm{id}}$ est $\frac{\mathrm{id}}{\varphi}$. On peut caractériser le pair $(D(R), Q)$ par une propriété universelle :

Proposition 1.0.2. *Pour tout catégorie $\mathscr{L}$ le foncteur Q induit un isomorphisme de la catégorie de foncteurs $D(R) \to \mathscr{L}$ vers la catégorie des foncteurs $K(R) \to \mathscr{L}$ envoyant quasi-isomorphismes de $K(R)$ vers isomorphisme de $\mathscr{L}$*

Démonstration : C'est le même de dire que l'on a un diagramme commitatif

$$\begin{tikzcd} K(R) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathscr{L} \\ D(R) \arrow[ur, dotted, "F_D"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

avec restrictions évidentes sur F. En effet, si $F : K(R) \to \mathscr{L}$ envoie quasi-isomorphismes vers isomorphismes, alors il se factorise à travers de $D(R)$ et le fonteur correspondent $F_D : D(R) \to \mathscr{L}$ satisfait $F_D(\frac{\varphi}{\psi}) = F(\varphi) \circ F(\psi)^{-1}$ et cela détermine F_D de façon unique. □

Proposition 1.0.3. *$D(R)$ dispose d'une structure unique de catégorie additive telle que Q est un foncteur additif.*

Démonstration : On sait déjà que $K(R)$ est une catégorie additive. Il rest a montrer que l'on peut additionner deux morphisme $\frac{\varphi_1}{\psi_1}$ et $\frac{\varphi_2}{\psi_2}$. Ça ce fait en les révrivant avec un dénominateur commun. (Il faut montrer que c'est en fait possible. . .) □

Par conséquent, la caractérisation en tant que propriété universelle se restreint aux catégories additives et foncteurs additifs. On s'intéresse au cas spécial de foncteurs homologiques $\mathrm{H}^i : D(R) \to \mathscr{M}(R)$.

Proposition 1.0.4. *Un morphisme α de $D(R)$ est un isomorphisme ssi $\mathrm{H}^i(\alpha)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ est un isomorphisme dans $\mathscr{M}(R)$.*

Démonstration : Cela suit de la construction. □

Exemples 1.0.5.

– R un corps, alors tout K-complexe (C, d) est scindé (de façon non-canonique) en une somme directe de complexes
$$\mathrm{Im}(d^{\bullet-1}) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(d^\bullet)$$
et en conséquence, isomorphe dans $D(R)$ au complexe
$$\cdots \xrightarrow{0} \mathrm{H}^{i-1}\, C \xrightarrow{0} \mathrm{H}^i\, C \xrightarrow{0} \mathrm{H}^{i+1}\, C \xrightarrow{0} \cdots$$
Dans ce cas le foncteur $D(R) \to R$-esp.vect, $C \mapsto \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^i\, C$ est une équivalence de catégories.

– Comparer la cohomologie de deux complexes par double complexe : soit Y le complexe total donné par $Y^n = \oplus_{i+j=n} C^i \oplus C'^j$. On a des $K(R)$-morphisme $\xi : C \to Y$ et $\xi' : C' \to Y$. Si la suite spectrale associée se dégénère, ξ' est un quasi-isomorphisme et on a le $D(R)$-morphisme
$$\frac{\mathrm{id}_{C'}}{\xi'} \circ \frac{\xi}{\mathrm{id}_C} : C \to C'$$
et donc un morphisme de cohomologies $\mathrm{H}^i\, C \to \mathrm{H}^i\, C'$. Le $D(R)$-morphisme remplace dans quelque sense la suite spectrale, et quelques constructions homologiques sont plus faciles à étudier avec ça.

Par définition on a pour tous complexe D, E sur R
$$\mathrm{H}^o \,\mathrm{Hom}^\bullet_R(D, E) = \mathrm{Hom}_{K(R)}(D, E).$$
Soit E q-injectif, l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{K(R)}(D, E) \to \mathrm{Hom}_{D(R)}(D, E)$ est bijective. Alors si $C \to E_C$ est une résolution q-injective (une telle existe toujours) on a
$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^i_R(D, C) &= \mathrm{H}^i \,\mathrm{Hom}^\bullet_R(D, C) \\ &= \mathrm{H}^i \,\mathrm{Hom}^\bullet_R(D, E) \\ &= \mathrm{H}^0 \,\mathrm{Hom}^\bullet_R(D, E\,[i]) \\ &= \mathrm{Hom}_{K(R)}(D, E\,[i]) \\ &= \mathrm{Hom}_{D(R)}(D, E\,[i]) = \mathrm{Hom}_{D(R)}(D, C\,[i]). \end{aligned}$$

Proposition 1.0.6. *Soit C un complexe sur R tel que $\mathrm{H}^i C = 0 \forall i > m$ et M un R-module. Alors H^m induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{D(R)}(C, M[-m]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^m C, \mathrm{H}^m(M[-m])) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^m C, M).$$

Si en outre, $\mathrm{H}^i C = 0 \forall i < m$, alors l'identité de $M = \mathrm{H}^m C$ sur R correspond à un $D(R)$-isomorphisme

$$C \xrightarrow{\sim} (\mathrm{H}^m C)[-m].$$

Démonstration : On considère le complexe

$$C_{\leqslant m} = \cdots \to C^{m-2} \xrightarrow{d^{m-2}} C^{m-1} \xrightarrow{d^{m-1}} \mathrm{Ker}(C^m \xrightarrow{d^m} C^{m+1}) \to 0.$$

L'inclusion $C_{\leqslant} \hookrightarrow C$ est un quasi-isomorphisme, donc sans perte de généralité, $C^n = 0$ pour $n > m$. Pour toute résolution injective (q-injective) $0 \to M \to I^\bullet$ on a des isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D(R)}(C, M[-m]) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(R)}(C, I^\bullet[-m]) \\ &\xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K(R)}(C, I^\bullet[-m]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^m C, M). \end{aligned}$$

C'est le premier énoncé. L'autre résultat suit de la propriété universelle. □

Corollaire 1.0.7. *Le foncteur envoyant un R-module M vers le complexe $M[0]$ est une équivalence de catégories de $\mathscr{M}(R)$ à la sous-catégorie pleine de $D(R)$ de complexes de cohomologie zéro en dehors de 0. Un quasi-inverse est H^0.*

2 Triangles

Bine qu'on ait établi que $D(R)$ est une catégorie additive, elle n'est en général pas abélienne. Conséquenmment la notion d'exactitude ne fait pas du sense. Mais comme l'exactitude se présente comme importante pour l'étude de fonteurs dérivés, elle est remplacée par une structure supplémentaire : la triangulation d'une catégorie donnée par des diagramme de la forme $\triangle : E \to F \to G \to E[1]$ des fois donné dans la forme plus suggestive

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "+"'] & \\ E \arrow[rr] & & F \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Particulièrement, on s'intéresse au diagramm isomorphe aux diagramme de la forme

$$\triangle : X \xrightarrow{\alpha} Y \hookrightarrow C_\alpha \twoheadrightarrow X[1] \tag{2}$$

où α est un morphisme de R-complexes et C_α est le cône de α. Pour toute suite exacte de R-complexes

$$0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$$

la composition d'applications de groupes gradués $C_\alpha \twoheadrightarrow Y \xrightarrow{\beta} Z$ est un quasi-isomorphisme de complexes, donc un isomorphisme de $D(R)$. (I wonder how this map is defined : $C_\alpha^n = Y^n + X^{n+1} \to Y^n \to Z^n$, is the first map just a projection ? Or where does α come into play ? Note : α is injectif.) Donc, dans $D(R)$ on peut identifier $Z = Y \oplus X[1]$ et la deuxième projection induit un morphisme de $D(R)$ de la forme $Z \to X[1]$. Cela nous donne un triangle

$$\triangle : X \to Y \to Z \to X[1]$$

et ce sont tous les triangles dans $D(R)$ à isomorphisme près. Comme l'opération $E \mapsto E[1]$ preserve homotopies et quasi-isomorphismes on dispose en fait d'un foncteur de translation

$$T : D(R) \to D(R)$$

automorphisme da la catégorie $D(R)$. Un triangle $\triangle : E \to F \to G \to E\,[1]$ donne lieu (à l'aide de la translation T^i, si on veut) à une suite exacte de cohomologies

$$\cdots \to \mathrm{H}^i\, E \to \mathrm{H}^i\, F \to \mathrm{H}^i\, G \to \mathrm{H}^i\, E\,[1] = \mathrm{H}^{i+1}\, E \to \cdots$$

De ce que l'on vient de dire, il suffit de montrer l'exactitude pour les triangle de la forme (2).

Cette discussion explique la validité de l'idée de remplacer suites courtes exactes de R-modules par des triangles dans $D(R)$. Les foncteurs en questions devraient respecter la triangulation de $D(R)$.

Soit $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ deux catégories abéliennes. On a des catégories triangulées $D(\mathscr{A}_1)$ et $D(\mathscr{A}_2)$ de façon similaire que $D(R)$. (Il faut être un peu prudent ici, mais on ignore les détails pour l'instant.)

Définition 2.0.8. Un Δ-foncteur $\Phi : D(\mathscr{A}_1) \to D(\mathscr{A}_2)$ est un foncteur additif qui preserve les triangle et translation dans la sense suivante : il dispose d'un isomorphisme fonctoriel

$$\vartheta : \Phi T_1 \xrightarrow{\sim} T_2 \Phi$$

tel que pour tout triangle de $D(\mathscr{A}_1)$

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \xrightarrow{w} E\,[1] = T_1 E$$

l'image sous Φ

$$\Phi E \xrightarrow{\Phi u} \Phi F \xrightarrow{\Phi v} \Phi G \xrightarrow{\Phi w} (\Phi E)\,[1] = T_2 \Phi E$$

est un triangle de $D(\mathscr{A}_2)$.

Les Δ-fonteurs formes une catégorie dont les flèches sont les morphismes fonctoriels qui commutent à la structure supplémentaire. Il s'appelle Δ-fonctoriel.

Etant donné que les foncteurs qu'on va discuter disposent en général, d'une façon naturelle d'un ϑ comme dans la définition, on travaille alors avec des Δ-foncteurs et des flèches Δ-fonctoriels.

Si on a une suite courte exacte de complexes dans $\mathscr{A}_1$

$$0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$$

on obtient non seulement une suite longue exacte de cohomologie sur $\mathscr{A}_1$, maisMonday, 20 October 2008 15 :22 aussi une suite longue exacte sur $\mathscr{A}_2$

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(\Phi X) \to \mathrm{H}^i(\Phi Y) \to \mathrm{H}^i(\Phi Z) \to \mathrm{H}^{i+1}(\Phi X) \to \cdots .$$

On rappelle que $K(R)$ est aussi une catégorie triangulée et que le fonteur naturel $Q : K(R) \to D(R)$ est un Δ-foncteur. En plus, tout foncteur additif de $\mathscr{M}(R)$ dans une catégorie additive s'étend de façon évidente à un Δ-foncteur entre les catégories homotopique associées.

3 Foncteurs dérivés à droite

Traîter des foncteurs dérivés du point de vue de complexes (au lieux de point de vue homologique). Dans ce paragraphe on discute deux exemples.

Pour un complexe C, on considère une résolution q-injective $q_C : C \to E_C$. Une telle existe toujours avec E_C le complexe total d'une résolution de Eilenberg-Cartan injective. Soit

$$R\Gamma_I C := \Gamma_I E_C$$

où pour un R-module M et un idéal $I \subset R$ on pose $\Gamma_I M = \{ m \in M \quad | \quad I^s m = 0 \;\text{ pour un } s > 0 \}$. Alors, par définition de la cohomologie locale, on a $\mathrm{H}^i_I\, C = \mathrm{H}^i\, R\Gamma_I C$. En tenant compte des remarques du dernier paragraphe, le point important ici est que l'on peut faire $R\Gamma_I$ un Δ-foncteur sur $D(R)$. La caractérisation de q-injectivité au début du premier paragraphe induit que tout quasi-isomorphisme entre deux complexes q-injectif C et C' est en fait un isomorphisme, comme quoi tout $K(R)$-diagramme $C \xleftarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi}$ se plonge de façon unique dans un $K(R)$-diagramme commutative

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "q_C"'] & X \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q_X"'] & C' \arrow[d, "q_{C'}"] \\ E_C & E_X \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[r, "\Phi"] & E_{C'} \end{tikzcd}$$

où Ψ et par conséquent le foncteur dérivé $\Gamma_I \Psi$ sont des isomorphisme (dans $K(R)$). En plus, la classe d'équivalence du $K(R)$-diagramme

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_I E_X \arrow[dl, "\Gamma_I \Psi"'] \arrow[dr, "\Gamma_I \Phi"] & \\ \Gamma_I E_C & & \Gamma_I E_{C'} \end{tikzcd}$$

ne dépend que de celle de $C \xleftarrow{\psi} X \xrightarrow{\varphi} C'$. Passant par la catégorie dérivée $D(R)$ via Q, le morphisme $\frac{\varphi}{\psi} : C \to C'$ correspond au morphisme $\frac{\Gamma_I \Phi}{\Gamma_I \Psi} : R\Gamma_I C \to R\Gamma_I C'$. Comme cette association preserve identités et composition, elle fait $R\Gamma_I$ un foncteur. De façon évidente, $R\Gamma_I$ est un Δ-fonteur avec l'isomorphisme

$$\vartheta(C) : R\Gamma_I(C\,[1]) \xrightarrow{\sim} (R\Gamma_I C)\,[1]\,,$$

c.-à-d. $R\Gamma_I$ commute à T. On obtient $\vartheta(C)$ par l'application de $Q\Gamma_I$ (Q étant un Δ-foncteur) à l'isomorphisme unique $\rho : E_{C[1]} \xrightarrow{\sim} E_C\,[1]$ tel que $\rho \circ q_{C[1]} = (q_C)\,[1]$.

Il y a une application fonctorielle $\zeta : Q\Gamma_I \to R\Gamma_I Q$ telle que pour tout C $\zeta(C)$ soit l'application évidente $\Gamma_I C \to \Gamma_I E_C$. Le couple $(R\Gamma_I, \zeta)$ est un foncteur dérivé à droite de Γ_I, caractérisé à isomorphisme près par la propriété universelle que ζ est l'object initial dans la catégorie de morphismes fonctoriels $Q\Gamma_I \to \Gamma$ où Γ s'étale sur la catégorie de foncteurs $K(R) \to D(R)$ qui envoient quasi-isomorphismes vers isomorphismes.

$$\begin{tikzcd} Q\Gamma_I \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr] & R\Gamma_I Q \arrow[d, dotted] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$

Autrement dit, la composition avec ζ induit une bijection entre l'ensemble $[R\Gamma_I Q, \Gamma]$ et l'ensemble $[Q\Gamma_I, \Gamma]$. En plus, via la propriété universelle de Q (1) on a une factorisation unique $\Gamma = \mathbf{\Gamma} Q$

$$\begin{tikzcd} K(R) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "Q"'] & D(R) \\ D(R) \arrow[ur, dotted, "\mathbf{\Gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

De manière similaire, on obtient pour tout Δ-foncteur Γ sur $K(R)$ via résolutions q-injective un Δ-foncteur dérivé à droite $R\Gamma$. Souvent de tels foncteurs sont des extensions de foncteurs additive de $\mathscr{M}(R)$ vers une catégorie abélienne.

Prenons par exemple le le foncteur dérivé à droite du Hom-foncteur, $R\operatorname{Hom}^\bullet_R(D, \cdot)$ pour un R-complexe D

$$R\operatorname{Hom}^\bullet_R(D, C) = \operatorname{Hom}^\bullet_R(D, E_C)$$

et alors les Ext-foncteurs

$$\operatorname{Ext}^i_R(D, C) = \mathrm{H}^i\, R\operatorname{Hom}^\bullet_R(D, C).$$

On veut relever l'identification homologique

$$\mathrm{H}^i_I\, C = \varinjlim_{s>0} \mathrm{Ext}^i_R(R/I^s, C)$$

en une relation de complexes dans $D(R)$. Il ne fait pas du sense de prendre $R\Gamma_I C = \lim_{\rightarrow} R\,\mathrm{Hom}(R/I^s, C)$ étant donné que la catégorie $D(R)$ n'est en général pas abélienne et donc $\lim_{\rightarrow}$ n'existe pas forcément. Pourtant, si on pense de $\lim_{\rightarrow}$ comme co-noyeau d'un endomorphisme d'une somme directe infinie, il est possible de remplacer $\lim_{\rightarrow}$ par la pointe d'une triangle, et exprimer $R\Gamma_I$ comme colimite homotopique.

Soit $h_s : D(R) \to D(R)$ le foncteur donné pour $C \in D(R)$ et $s \in \mathbb{N}$ par

$$h_s C := R\,\mathrm{Hom}^\bullet_R(R/I^s, C).$$

Il y a des applications naturelles fontorielles $p_s : h_s \to h_{s+1}$ et $q_s : h_s \to R\Gamma_I$ telles que $q_{s+1} \circ p_s = q_s$. La famille

$$(1, -p_m)_m : h_m \to h_m \oplus h_{m+1} \subset \oplus_{s\geqslant 1} h_s$$

définit un $D(R)$-morphisme

$$p : \oplus_{s\geqslant 1} h_s \to \oplus_{s\geqslant 1} h_s.$$

Il faut prêter attention aux détails, p.ex. la somme directe infinie dans $D(R)$.

Proposition 3.0.9. *On dispose d'un triangle*

$$\oplus_{s\geqslant 1} h_s C \xrightarrow{p} \oplus_{s\geqslant 1} h_s C \xrightarrow{\sum q_s} R\Gamma_I C \to (\oplus_{s\geqslant 1} h_s C)\,[1]$$

Démonstration : ObdA C soit q-injectif, tel que $h_s C = \mathrm{Hom}^\bullet_R(R/I^s, C)$ et $R\Gamma_I C = \Gamma_I C$. Comme $(\sum q_s) \circ p = 0$, il existe un morphisme de R-complexes

$$\overline{q} : C_p = (\oplus_{s\geqslant 1} h_s C) \bigoplus (\oplus_{s\geqslant 1} h_s C)\,[1] \to \Gamma_I C,$$

où C_p est le cône de p, qui se restreint à $\sum q_s$ sur le premier terme de la somme et disparaît sur le deuxième. Il suffit de montrer que $\overline{q}$ est un quasi-isomorphisme. Mais comme en cohomologie $\mathrm{H}^i\, p$ est injective et la suite longue de cohomologie est exacte, alors la cohomologie de C_p est donnée par

$$\mathrm{H}^i_I\, C_p = \lim_{\rightarrow} \mathrm{H}^i\, h_s C = \lim_{\rightarrow} \mathrm{H}^i\,\mathrm{Hom}^\bullet_R(R/I^s, C) = \mathrm{H}^i \lim_{\rightarrow} \mathrm{Hom}^\bullet_R(R/I^s, C) = \mathrm{H}^i\,\Gamma_I C,$$

d'où l'énoncé. □

4 Foncteurs dérivés à gauche

La notion dual de foncteur dérivé à droite est celle de foncteur dérivé à gauche. Tensor and Tor.

5 Adjonction

Il y a une dualité fondamentale entre $R\,\mathrm{Hom}^\bullet_R$ et $\otimes$.

6 Dualités

7 Le groupe de morphisme entre deux complexes

7.1 Cohomologie locale d'un module

Soit R un anneau commutatif, $\mathscr{M}(R)$ la catégorie de R-modules. Pour tout idéal I dans R, soit Γ_I le sous-foncteur de I-torsion du foncteur d'identité sur $\mathscr{M}(R)$, c-à-d pour un R-module M

$$\Gamma_I M = \left\{ m \in M \;\middle|\; \exists s > 0 \,:\, I^s m = 0 \right\}.$$

Si $I \subset J$, alors $\Gamma_J \subset \Gamma_I$, égalité si $\exists n$ tel que $J^n \subset I$. Pour tout M on choisi une résolution injective

$$E_M^\bullet : \cdots \to 0 \to 0 \to E_M^0 \to E_M^1 \to E_M^2 \to \cdots$$

et un R-morphisme $M \to E_M^0$ tel que la suite

$$0 \to M \to E_M^0 \to E_M^1 \to \cdots$$

soit exacte. Une telle résolition existe, voir [1]. Puis on définit les modules de cohomologie locale

$$\mathrm{H}_I^i(M) := \mathrm{H}^i(\Gamma_I E_M^\bullet).$$

Chaque H_I^i est un foncteur sur $\mathscr{M}(R)$ – foncteur dérivé plus haut de Γ_I. Pour $i < 0$ $\mathrm{H}_I^i = 0$ et comme Γ_I est exacte à gauche $\mathrm{H}_I^0 = \Gamma_I$. Pour toute suite exacte courte de R-modules

$$(\sigma): \qquad 0 \to M' \to ; \to M''$$

il existe de façon naturelle un R-homomorphisme de connexion

$$\delta_I^i(\sigma) : \mathrm{H}_I^i(M'') \to \mathrm{H}_I^{i+1}(M')$$

qui donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie comme toujours.

Une suite de foncteurs $(\mathrm{H}_*^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ de ce type (c-a-d, H_*^0 exacte à gauche, avec δ_*^i) est dite un foncteur de cohomologie. Cohomologie locale est charactérisé à isomorphisme canonique près comme l'extension cohomologique universelle de Γ_I.

On a des résultats similaire pour tout foncteur exact à gauche de $\mathscr{M}(R)$. Par example : pour un R-module fixe N

$$\mathrm{Ext}_R^i(N, M) := \mathrm{H}^i \operatorname{Hom}_R(N, E_M^\bullet)$$

est une extension cohomologique standard de $\operatorname{Hom}_R(N, \cdot)$.

7.2 Generalisation aux complexes

Un morphisme de R-complexes :

$$\psi : (C^\bullet, d^\bullet) \to (C_*^\bullet, d_*^\bullet)$$

est une famille de R-morphisme, telle que $d_*^i\psi^i = \psi^{i+1}d^i$. Cela induit un R-morphisme en cohomologie/homologie. ψ est un quasi-isomorphisme si il induit un isomorphisme en cohomologie. Une homotopie entre morphismes de R-complexes : $\psi_1, \psi_2 : C^\bullet \to C_*^\bullet$ est une famille de R-morphisme $h^i : C^i \to C_*^{i+1}$ telle que

$$\psi_1^i - \psi_2^i = d_*^{i-1}h^i + h^{i+1}d^i$$

Dans ce cas on dit que ψ_1 et ψ_2 sont homotopiques. C'est une relation d'équivalence, preservée par addition et composition. Le passage de la catégorie de complexes à la catégorie homotopique n'est qu'un passage de morphismes aux classes d'équivalence de morphismes tout en preservant les objets. La définition de la catégorie dérivée d'une catégorie abelienne, ne dépend pas primordialement du fait si oncommence par la categorie de complexes ou par la catégorie homotopique.

Définition 7.2.1. Un R-complexe $C^\bullet$ est q-injectif si tout quasi-isomorphisme de $C^\bullet$, $\psi : C \to C_*$ possède d'un inverse homotopique à gauche, c-a-d, il existe $\psi_* : C_* \to C$ tel que $\psi_* \circ \psi$ soit homotopique à l'identité.

Équivalent à cette définition est :

(#) Pour tout $K(R)$-diagramme

$$\begin{tikzcd} & X^\bullet \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ C_*^\bullet & & C^\bullet \end{tikzcd}$$

où ψ est un quasi-isomorphisme, il existe un $K(R)$-morphisme unique $\phi_* : C_* \to C$ tq $\phi_*\psi = \phi$.

Tout complexe injectif borné en bas est q-injectif.

Une résolution q-injective d'un complexe C : un quasi-isomorphisme $C \to E$ où E est un complexe q-injectif. Elle existe pour chaque complexe (complexe total d'une résolution de Cartan-Eilenberg injective). On fixe pour chaque complexe C une résolution q-injective E_C et défini la cohomologie locale de C

$$\mathrm{H}^i_I(C) := \mathrm{H}^i(\Gamma_I E_C).$$

De la propriété (#) de q-injectivité il suit que

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\phi"'] & E_{C_1} \arrow[d, dotted, "\exists ! \phi_*"] \\ C_2 \arrow[r, "\psi_2"'] & E_{C_2} \end{tikzcd}$$

Donc on peut considerer les H^i_I comme foncteurs $K(R) \to \mathscr{M}(R)$, indépendent du chooix de E_C.

On veut généraliser des conceptes pour les object de $\mathscr{M}(R)$ aux complexes. Par exemple : le foncteur Ext. Soient X, Y deux R-complexes. Le complexe $\mathrm{Hom}^\bullet_R(X,Y)$ est donné par

$$\mathrm{Hom}^n_R(X,Y) = \left\{ \text{ familles de } R\text{-morphisme } f = (f_j : X^j \to Y^j + n)_{j\in\mathbb{Z}} \right\}.$$

Pour $n = -1$ ce sont des équivalences homotopiques. Les differentielles sont

$$\begin{array}{rcl} d^n : \mathrm{Hom}^n_R(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}^{n+1}_R(X,Y) \\ f & \mapsto & d^n f := \left(d_Y^{j+n} \circ f_j - (-1)^n f_{j+1} \circ d_X^j \right)_{j\in\mathbb{Z}}. \end{array}$$

This looks to me like a simplyfied version of the spectral sequence of a double complex. Can one think of it like this ? In fact it is called the «inner Hom ». We set

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}^n(A^\bullet, B^\bullet) & = & \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(A^i, B^{i+n}) \\ df & = & d_B \circ f - (-1)^n f \circ d_A. \end{array}$$

Then we have the following canonical isomorphisms

$$\begin{array}{rcl} Z^i \,\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) & = & \mathrm{Hom}_{C(R)}(A^\bullet, B^\bullet\,[i]), \\ B^i \,\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) & = & \{ \text{ morphisme homotopique à zéro } \} \end{array}$$

Et donc on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^i \,\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) = \mathrm{Hom}_{K(R)}(A^\bullet, B^\bullet[i])$$

Maintenant on peut définir Ext :

$$\mathrm{Ext}^i_R(D^\bullet, C^\bullet) := \mathrm{H}^i \,\mathrm{Hom}^\bullet_R(D^\bullet, E^\bullet_C).$$

Encore on a une identification fonctorielle compatible aux morphismes de connexion

$$\mathrm{H}^i_I(C^\bullet) = \varinjlim_{[s>0]} \mathrm{Ext}^i_R(R/I^s, C^\bullet).$$

8 What is the derived category ? ?

The idea of the derived category as we understand it today :

1. On object of an abelian category should be identified with all its resolutions. – Why ?

2. The main reason for such an identification is that some important functors (such as hom, tensor product, global sections, etc.) should be redefined. Their «naive»definitions should be applied only to some special objects which are acyclique with respect to this functor. If for example X is a flat module and Y is an arbitrary one, then$X \otimes Y$ is the correct definition of the tensor product, but in the general case we have to replace $X \otimes Y$ by $P^bullet \otimes Y$ where $P^\bullet$ is a flat resolution of X. Similarly to get the correct definition of the group $\Gamma(\mathscr{F})$ one has to take the complex $\Gamma(\mathscr{I}^\bullet)$ where $\mathscr{I}^\bullet$ is an injective resolution of $\mathscr{F}$. – How to do this ?
3. To adopt this viewpoint we must consider from the very beginning not only objects of an abelian category and their resolutions but arbitrary complexes. One of the reasons why we have to do this is that the complexes in the above examples $P^\bullet \otimes Y$ and $\Gamma(\mathscr{I}^\bullet)$ would usually have non-trivial cohomology in several degrees and not only in degree zero. (Classically these are the derived functors $\mathrm{Tor}_i(X, Y)$ and $\mathrm{H}^i(\mathscr{F})$ respectively.) Hence the relation that enables us to identify an object and its resolution should be generalised to arbitrary complexes. The appropriate generalisation is given by the notion of quasi-isomorphism. – What is the resulting equivalence relation ?
4. The equivalence relation between complexes generated by quasi-isomorphism is rather complicated, and what happens after the factorisation by this equivalence relation is difficult to trace. The techniques that enable us to do it form the core of the theory of derived categories. – Is there a concept of exactness ?
5. The above mentioned redefinition of such functors as Γ and $\otimes$, etc. makes semi-exact functors in some sense «exact». The very notion of exactness in a derived category is by no means obvious. The basis of this notion in the classical homological algebra is the exact sequence of higher derived functors, which is invariant under the change of resolution.

Références

[1] Bourbaki N. : *Algàbre, Chapitre 10 : Algèbre homologique.* Masson, Paris, (1980).

[2] de Jong A. J. : *Algebraic deRham Cohomology.* http ://www.math.columbia.edu/~dejong/seminar/note_on_algebrai

[3] Gelfand, S.I. ; Manin, Yu.I. : *Methods of Homological Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).

[4] Keller B. : *On differential graded categories.* International Congress of Mathematicians Vol. II, 151-190, Eur. Math. Soc., Zürich, (2006).

[5] Lipman J. : *Lectures on local cohomology and duality.* In *Local cohomology and its applications* (Guanajuato, 1999), volume 226 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 39-89., Dekker, New York, (2002).

[6] Murfet D. : *Derived Categories Part I.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategories.pdf, (2006).

[7] Murfet D. : *Derived Categories Part II.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesPart2.pdf, (2006).

[8] Murfet D. : *Derived Categories of Sheaves.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesOfSheaves.pdf, (2006).

[9] Murfet D. : *Derived Categories of Quasi-coherent Sheaves.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesOfQuasicoherentSheaves.pdf, (2006).