1. R un corps, alors tout K-complexe (C, d) est scindé (de façon non-canonique) en une somme directe de complexes
$$\mathrm{Im}(d^{\bullet-1}) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(d^{\bullet})$$
et en conséquence, isomorphe dans $D(R)$ au complexe
$$\cdots \xrightarrow{0} \mathrm{H}^{i-1} C \xrightarrow{0} \mathrm{H}^{i} C \xrightarrow{0} \mathrm{H}^{i+1} C \xrightarrow{0} \cdots$$
Dans ce cas le foncteur $D(R) \to R$-esp.vect, $C \mapsto \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^i C$ est une équivalence de catégories.
2. Comparer la cohomologie de deux complexes par double complexe : soit Y le complexe total donné par $Y^n = \oplus_{i+j=n} C^i \oplus C'^j$. On a des $K(R)$-morphisme $\xi : C \to Y$ et $\xi' : C' \to Y$. Si la suite spectrale associée se dégénère, ξ' est un quasi-isomorphisme et on a le $D(R)$-morphisme
$$\frac{\mathrm{id}_{C'}}{\xi'} \circ \frac{\xi}{\mathrm{id}_C} : C \to C'$$
et donc un morphisme de cohomologies $\mathrm{H}^i C \to \mathrm{H}^i C'$. Le $D(R)$-morphisme remplace dans quelque sense la suite spectrale, et quelques constructions homologiques sont plus faciles à étudier avec ça.
3. *Soit C un complexe sur R tel que $\mathrm{H}^i C = 0 \forall i > m$ et M un R-module. Alors H^m induit un isomorphisme*
$$\mathrm{Hom}_{D(R)}(C, M[-m]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^m C, \mathrm{H}^m(M[-m])) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^m C, M).$$
Si en outre, $\mathrm{H}^i C = 0 \forall i < m$, alors l'identité de $M = \mathrm{H}^m C$ sur R correspond à un $D(R)$-isomorphisme
$$C \xrightarrow{\sim} (\mathrm{H}^m C)[-m].$$
Démonstration : On considère le complexe
$$C_{\leqslant m} = \cdots \to C^{m-2} \xrightarrow{d^{m-2}} C^{m-1} \xrightarrow{d^{m-1}} \mathrm{Ker}(C^m \xrightarrow{d^m} C^{m+1}) \to 0.$$
L'inclusion $C_{\leqslant} \hookrightarrow C$ est un quasi-isomorphisme, donc sans perte de généralité, $C^n = 0$ pour $n > m$. Pour toute résolution injective (q-injective) $0 \to M \to I^\bullet$ on a des isomorphisme
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D(R)}(C, M[-m]) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(R)}(C, I^\bullet[-m]) \\ &\xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K(R)}(C, I^\bullet[-m]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^m C, M). \end{aligned}$$
C'est le premier énoncé. L'autre résultat suit de la propriété universelle. □
4. Exemples pour foncteurs dérivés :
   (a) La cohomologie locale $\mathrm{H}^i_I(M) := \mathrm{H}^i(\Gamma_I E^\bullet_M)$ est l'extension cohomologique universelle de $\Gamma_I(\cdot)$.
   (b) $\mathrm{Ext}^i_R(N, \cdot$ est celle de $\mathrm{Hom}_R(N, \cdot)$.
   (c) Avec $\Gamma_I E^\bullet_M = \lim_{\to[s>0]} \mathrm{Hom}_R(R/I^s, E^\bullet_M)$, on a une identification canonique de fonteurs cohomologiques
$$\mathrm{H}^i_I(M) = \lim_{\to[s>0]} \mathrm{Ext}^i_R(R/I^s, M)$$
5. Exemple pour un complexe q-injectif : Tout complexe injectif borné en bas est q-injectif. Si C est zero en dehors de j, C est q-injectif ssi C^j est injectif.
6. Un quasi-isomorphisme qui n'est pas un isomorphisme : Soit k de charactéristique 0, donc cohomologie de deRham algébrique fait du sense. Soit
$$\begin{aligned} C_1 &= \Omega_k : \cdots \to 0 \to \Omega^0_k = k \to 0 \to \cdots \\ C_2 &= \Omega_{k[\underline{X}]/k} : \cdots \to 0 \to \Omega^0_{k[\underline{X}]/k} \to \cdots \to \Omega^n_{k[\underline{X}]/k} \to 0 \to \cdots \end{aligned}$$
Dans les deux cas, la cohomologie est $\mathrm{H}^0 = k$ est $\mathrm{H}^i = 0$ pour $i \neq 0$, donc les complexes sont quasi-isomorphe tandis qu'ils ne soient évidemment pas isomorphes.

7. Comprendre morphisme dans $D(R)$, où $D(\mathscr{A})$ pour une catégorie abélienne $\mathscr{A}$. Par définition un un morphisme f dans $D(\mathscr{A})$ est $= 0$ ssi $\exists$ un quasi-isomorphisme s tq $f \circ s = 0$ est homotopique à 0. Si $f = 0$ alors $\mathrm{H}^n(f) = 0$. Mais le converse n'est pas vrai en général : Pour $\mathscr{A} = Ab$ on considère les complexes de longueur 2

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "c"] & \mathbb{Z}/3 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

où tous les morphisme a, b, c, d envoient générateurs vers générateurs. Dans ce cas $\mathrm{H}^\bullet(f) = 0$, mais $f \neq 0$. Alors dans la chaîne suivante toutes les implications sont strictes :

$$\{f =_{C(\mathscr{A})}\} \Rightarrow \{f =_{K(\mathscr{A})}\} \Rightarrow \{f =_{D(\mathscr{A})}\} \Rightarrow \{\mathrm{H}^\bullet(f) = 0\}.$$

Références

[1] Bourbaki N. : *Algàbre, Chapitre 10 : Algèbre homologique.* Masson, Paris, (1980).

[2] de Jong A. J. : *Algebraic deRham Cohomology.* http ://www.math.columbia.edu/∼dejong/seminar/note_on_algebraic

[3] Gelfand, S.I. ; Manin, Yu.I. : *Methods of Homological Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).

[4] Keller B. : *On differential graded categories.* International Congress of Mathematicians Vol. II, 151-190, Eur. Math. Soc., Zürich, (2006).

[5] Lipman J. : *Lectures on local cohomology and duality.* In *Local cohomology and its applications* (Guanajuato, 1999), volume 226 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 39-89., Dekker, New York, (2002).

[6] Murfet D. : *Derived Categories Part I.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategories.pdf, (2006).

[7] Murfet D. : *Derived Categories Part II.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesPart2.pdf, (2006).

[8] Murfet D. : *Derived Categories of Sheaves.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesOfSheaves.pdf, (2006).

[9] Murfet D. : *Derived Categories of Quasi-coherent Sheaves.* http ://therisingsea.org/notes/DerivedCategoriesOfQuasicoherentSheaves.pdf, (2006).