Ayant en tête de construire classes de Chern et classes de cycle dans un cas spécifique, on étudie quand c'est possible et comment s'y prendre en général. On suit le livre de Henri Gillet.

1 Théories de cohomologie géneralisées sur catégories de schémas

On décrit deux approches à une théorie de cohomologie généralisée.

1.1 Théorie de dualité

Soit $\mathscr{V}$ une catégorie de schémas et $\mathscr{V}_{\mathrm{ZAR}}$ son gros site de Zariski.

Définition 1.1.1. Une théorie de cohomologie graduée $\Gamma(*)$ sur $\mathscr{V}$ est un complexe gradué de faisceaux de groupes abéliens

$$\underline{\Gamma}^*(*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \underline{\Gamma}^*(i)$$

sur $\mathscr{V}_{\mathrm{ZAR}}$, avec un accouplement dans la catégorie dérivée de complexes gradués de faisceaux abéliens

$$\underline{\Gamma}^*(*) \otimes^L_{\mathbb{Z}} \underline{\Gamma}^*(*) \to \underline{\Gamma}^*(*),$$

associatif, avec unité, commutatif.

Si on posède d'une telle théorie de cohomologie on peut définir pour toute paire de schémas dans $\mathscr{V}$ (Y, X), où Y est un sous-schéma fermé de X, la cohomologie de X à coéfficients dans Γ et à support dans Y par

$$\mathrm{H}^i_Y(X, \Gamma(j)) = \mathbb{H}^i_Y(X, \underline{\Gamma}^*(j)),$$

où de la côté droite on prend l'hypercohomologie. Bien sur on peut définir la cohomologie de X simplement par mettre $Y = X$. Les groupes $\mathrm{H}^i_Y(X, \Gamma(j))$ sont des foncteurs contravariant en (Y, X) : pour $f : Z \to X$ il y a une application naturelle pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$

$$f^! : \mathrm{H}^i_Y(X, \Gamma(j)) \to \mathrm{H}^i_{f^{-1}(Y)}(Z, \Gamma(j)).$$

Le produit sur le complexe gradué $\underline{\Gamma}^*(*)$ induit une structure d'anneau commutatif sur $\mathrm{H}^*(X, \Gamma(*))$ et pour (Y, X) comme plus haut une structure de $\mathrm{H}^*(X, \Gamma(*))$-module sur $\mathrm{H}^*_Y(X, \Gamma(*))$, et cettes structures sont compatibles aux morphismes $f^!$. La définition des groupes de cohomologie s'étend aux schémas simplicials de $\mathscr{V}$: pour $j \geqslant 0$ $\underline{\Gamma}^*(j)$ est un complexe de faisceaux sur $\mathscr{V}_{\mathrm{ZAR}}$ qui se restreint à un complexe de faisceaux sur $X_\bullet$ et on peut prendre l'hypercohomologie. (I don't know exactly what the issues here are. . .)

On tend à ce que la théorie de cohomologie $\Gamma(*)$ s'étend à une théorie de dualité. On fixe une catégorie de schémas sur une base S.

Définition 1.1.2. Une théorie de dualité (tordue) sur $\mathscr{V}$ à coéfficient dans $\Gamma(*)$ se compose des données suivantes :

1. **Homology functor** Un foncteur covariant da la catégorie $\mathscr{V}_*$ (de morphisme propre en $\mathscr{V}$) vers la catégorie de groupe bi-gradués abéliens

   $$X \mapsto \bigoplus_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}_i\left(X, \Gamma(j)\right),$$

   qui est un pré-faisceau de Zariski pour tout $X \in \mathscr{V}$ tel que le diagramme à droite commute sous condition que le diagramme à gauche est cartésien avec f, g porpre et i, i' des immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i'} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \xrightarrow{i} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}_i(U, \Gamma(j)) & \xleftarrow{i'^*} & \mathrm{H}_i(X, \Gamma(j)) \\ {\scriptstyle g_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_!} \\ \mathrm{H}_i(V, \Gamma(j)) & \xleftarrow{i^*} & \mathrm{H}_i(Y, \Gamma(j)) \end{array}$$

2. **Long exact homology sequence** Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée dans $\mathscr{V}$, et $\alpha : (X - Y) \to X$ l'immersion ouverte correspondante. Alors il y a une suite longue exacte

$$\cdots \to \mathrm{H}_i(Y, \Gamma(j)) \xrightarrow{i_!} \mathrm{H}_i(X, \Gamma(j)) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{H}_i(X - Y, \Gamma(j)) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_{i-1}(Y, \Gamma(j)) \to \cdots$$

qui est fonctorielle dans le sense que pour tout morphisme propre $f : X \to X'$ dans $\mathscr{V}$ il y a un morphisme de la suite de (Y, X) à celle de $(f(Y), X')$.

3. **Cap product** Pour toute paire (Y, X) comme plus haut un produit

$$\bigcap : \mathrm{H}_i(X, \Gamma(r)) \otimes \mathrm{H}^j_Y(X, \Gamma(s)) \to \mathrm{H}_{i-j}(Y, \Gamma(r - s))$$

un accouplement de pré-faisceaux pour tout X dans $\mathscr{V}$ tel que pour tout diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_Y"'] & X \arrow[d, "f_X"] \\ Y' \arrow[r, "i'"] & X' \end{tikzcd}$$

où f_X est propre on a la formule de projection

$$f_!(\alpha) \cap z = f_!(\alpha \cap f^!(z))$$

pour $\alpha \in \mathrm{H}_i(X, \Gamma(r))$ et $z \in \mathrm{H}^i_Y(X', \Gamma(s))$.

4. **Fundamental class** Pour tout $X \in \mathscr{V}$ plat sur S de dimension relative $\leqslant n$ il y a une section global η_X du préfaisceau de X $\mathrm{H}_{dn}(X, \Gamma(n))$ (où $d = 1, 2$ ne dépend que de la théorie Γ).

5. **Poincaré duality** Soit $X \in \mathscr{V}$ lisse sur S de dimension relative n, $i : Y \to X$ une immersion fermée. Alors le morphisme naturel induit par η_X

$$\eta_X \cap : \mathrm{H}^{dn-i}_Y(X, \Gamma(n - r)) \to \mathrm{H}_i(Y, \Gamma(r))$$

est un isomorphisme, et pour $Y = X$, $i = dn$, $r = n$ la classe

$$\eta_X \in \mathrm{H}_{dn}(X, \Gamma(n)) \cong \mathrm{H}^0(X, \Gamma(0))$$

est l'unité de l'anneau $\mathrm{H}^*(X, \Gamma(*))$.

Remarque 1.1.3. De la première partie, pas de restriction sur Y. Donc, si $Y \in \mathscr{V}$ se plonge dans un X lisse sur S, il est possible de calculer $\mathrm{H}_i(Y, \Gamma(r))$ comme $\mathbb{H}^{dn-i}_Y(X, \underline{\Gamma}^*_X(n - r))$.

6. **? ?** Soit $Y \to X$ une immersion fermée de codimension p, lisse sur S. Alors, l'isomorphisme précédent induit un isomorphisme

$$\mathrm{H}^i(Y, \Gamma(r)) \cong \mathrm{H}^{i+dp}_Y(X, \Gamma(r + p)).$$

Cet isomphisme est en fait induit par une application

$$j_! : \underline{\Gamma}^*_Y(r) \to Rj^!\underline{\Gamma}^*_X(r + p)\,[dp]\,,$$

où $j^!$ est le foncteur «sections à support dans Y».

7. **Projection formula, cup product** $j : Y \to X$ immersion fermée de codim p, lisse sur S. Alors la formule de projection de plus haut (maintenant dual) pour $z \in \mathrm{H}^p(Y, \Gamma(r))$, $a \in \mathrm{H}^i(X, \Gamma(s))$

$$j_!(z) \cup a = j_!(z \cup j^!(a))$$

est représenté par la commutativité du diagramme dans lacatégorie dérivée

$$\begin{tikzcd}
Rj_!\underline{\Gamma}^*_Y(r) \otimes^L_{\mathbb{Z}} \underline{\Gamma}^*_X(s) \arrow[r, "1\otimes j^!"] \arrow[d, "j_!\otimes 1"', "\sim"] & Rj_!\left(\underline{\Gamma}^*_Y(r) \otimes^L_{\mathbb{Z}} \underline{\Gamma}^*_Y(s)\right) \arrow[d] \\
Rj^!\underline{\Gamma}^*_X(r+p)\,[do] \otimes^L_{\mathbb{Z}} \underline{\Gamma}^*_X(s) \arrow[dr] & Rj_!(\underline{\Gamma}^*_Y(r+s)) \arrow[d, "\sim"] \\
 & Rj^!(\underline{\Gamma}^*_X(s+r+p)\,[dp])
\end{tikzcd}$$

8. **Künneth formula** Pour $X, Y \in \mathscr{V}$ quasi-projective sur S il existe des produits exterieurs

$$\boxtimes : \mathrm{H}_i(X, \Gamma(r)) \otimes \mathrm{H}_j(Y, \Gamma(s)) \to \mathrm{H}_{i+j}(X \times Y, \Gamma(r+s))$$

   induit par le produit naturel $\mathrm{H}^*_X(M, \Gamma(*)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}^*_Y(N, \Gamma(*)) \to \mathrm{H}^*_{X\times Y}(M \times N, \Gamma(*))$ où $X \to M$ et $Y \to N$ sont des plongement dans des schémas lisses sur S.
9. **Affine line formula ? ?** Pour tout $X \in \mathscr{V}$, $p : \mathbb{A}^1_X \to X$ la projection naturelle, alors le morphisme induit

$$p^* : \mathrm{H}^i(X, \Gamma(r)) \to \mathrm{H}^i(\mathbb{A}^1_X, \Gamma(r))$$

   est un isomorphisme.
10. **Projective bundle formula** Pour $n \geqslant 1$, $X \in \mathscr{V}$ le produit naturel

$$\mathrm{H}_*(\mathbb{P}^n_S, \Gamma(*)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_*(X, \Gamma(*)) \to \mathrm{H}_*(\mathbb{P}^n_X, \Gamma(*))$$

   est surjectif et il y a un isomorphisme

$$\sum_{p=0}^{n} \pi^*(\cdot) \cap \xi^p : \bigoplus_{p=0}^{n} \mathrm{H}_{i-dp}(X, \Gamma(rp)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_i(\mathbb{P}^n_X, \Gamma(r)),$$

   pour $\pi : \mathbb{P}^n_X \to X$ et $\xi \in \mathrm{H}^d(\mathbb{P}^n_S, \Gamma(1))$ l'image inverse de la classe de l'hyperplan dans $\mathrm{H}^d(\mathbb{P}^n_X, \Gamma(1))$ sous $\mathbb{P}^n_X \to \mathbb{P}^n_S$.
11. **Picard group** Il y a une transformation naturelle de foncteurs contravariants sur $\mathscr{V}$

$$\mathrm{Pic}(\cdot) \to \mathrm{H}^d(\cdot, \Gamma(1))$$

   qui étend l'application de classe de cycle induit par la classe fondamentale de plus haut.

Quelques exemples :

Références

[1] Gillet H. : *Riemann-Roch Theorems for Higher Algebraic K-Theory.* Advances in Mathematics 40, 203-289, (1981).