k un corps parfait de caractéristique p, X un k-schéma lisse. On travaille avec la topologie étale.

1 Les faisceaux $W_n\Omega^i_{X,\log}$

1.1 Le morphisme $d\log$

our $n \geqslant 1$ on denote le morphisme de faisceaux abéliens

$$\begin{array}{rcl} d\log : \mathscr{O}_X^* & \to & W_n\Omega^1_X \\ x & \mapsto & \dfrac{d\underline{x}}{\underline{x}} \end{array}$$

Pour n variable cela forme un morphisme de systèmes projectifs.

1.2 Définition du faisceau

Pour $i \geqslant 1$, $W_n\Omega^i_{X,\log}$ est le sous-faisceau de $W_n\Omega^i_X$ engendré localement pour la topologie étale sur X par les sections de la forme $d\log \underline{x}_1 \cdots d\log \underline{x}_i$ avec $x_1, \dots, x_i \in \mathscr{O}_X^*$ pour $n \geqslant 1$ et $= 0$ pour $n \leqslant 0$. Pour $i = 0$, on conviendra que $W_n\Omega^0_{X,\log} = \mathbb{Z}/p^n$.

Pour un morphisme de k-schémas lisses $f : X \to X'$ les morphismes canoniques de fonctorialité induisent des morphismes canoniques adjoints l'un de l'autre

$$\begin{array}{rcl} W_n\Omega^\bullet_{X',\log} & \to & f_*W_n\Omega^\bullet_{X,\log} \\ f^{-1}W_n\Omega^\bullet_{X',\log} & \to & W_n\Omega^\bullet_{X,\log}. \end{array}$$

La structure de produit de $W_n\Omega^\bullet_X$ induit une structure de produit associatif et anti-commutatif sur $W_n\Omega^\bullet_{X,\log}$.

1.3 Résultats essentiels

On a une suite exacte pour la topologie étale sur X

$$o \to \Omega^i_{X,\log} \to Z\Omega^i_X \xrightarrow{1-C_X^{-1}} \Omega^i_X \to 0.$$

Cela se généralise : on a une suite exacte de pro-faisceaux abéliens pour la topologie étale

$$0 \to W_\bullet\Omega^i_{X,\log} \to W_\bullet\Omega^i_X \xrightarrow{1-F} W_\bullet\Omega^i_X \to 0$$

Pour la construction de classes de Chern, nous aurons à travailler avec les catégories dérivées $D(\mathbb{Z}/p^n - \text{Mod}$, $D(\mathbb{Z}/p^\bullet - \text{pro-Mod})$, $D(W_n\Omega^\bullet_{X,\log} - \text{Mod})$, $W_n\Omega^\bullet_{X,\log}$ étant unanneaux d'après ce qui précède, $D(W_\bullet\Omega^\bullet_{X,\log} - \text{Mod})$, les modules des dernières deux catégories sont gradués.

Théorème 1.3.1. *La flèache naturelle de $D(W_n\Omega^\bullet_{X,\log} - \text{pro-Mod})$*

$$W_n\Omega^\bullet_{X,\log} \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^n \hat{\otimes} W_\bullet\Omega^\bullet_{X,\log}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Suffit de montrer que c'est un iso pour chaque i dans $D(\mathbb{Z}/p^n - \text{pro-Mod})$. On a un iso dans $\mathbb{Z}/p^n$-pro-Modules

$$W_n\Omega^i_{X,\log} \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z}/p^n \otimes W_\bullet\Omega^i_{X,\log}$$

et les foncteurs Tor sont triviaux

$$\mathrm{Tor}_j^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p^n, W_\bullet\Omega^i_{X,\log}) = 0$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$ car multiplication par p est injective dans le pro-objet $W_\bullet\Omega^i_{X,\log}$ car c'est vrai pour $W_\bullet\Omega^i_X$. □

2 Cohomologie logarithmique des fibrés projectifs

Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-modules localement libre de rang $r+1$ où $r \geqslant -1$. On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathscr{E})$ le fibré projectif sur X associé à $\mathscr{E}$ et $\pi : \mathbb{P} \to X$ la projection canonique. On veut calculer la cohomologie de $\mathbb{P}$ en termes de celle de X.

2.1 Projective bundle formula

L'application $d\log$ pour chaque n comme définie plus haut, induit un morphisme de systèmes projectifs et par suite de limites

$$d\log : \mathscr{O}_{\mathbb{P}}^* \to \lim_{\leftarrow} W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}$$

qui composé avec l'application canonique $\lim_{\leftarrow} W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log} \to R\lim_{\leftarrow} W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}$ fournit un morphisme dans la catégorie déricée $D(\mathbb{Z})$

$$d\log : \mathscr{O}_{\mathbb{P}}^* \to R\lim_{\leftarrow} W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}.$$

Maintenant, on applique le premier foncteur de cohomology sur $\mathbb{P}$ et rappelle que $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}}^*) = \mathrm{Pic}(\mathbb{P})$:

$$c_1 : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{P}, R\lim_{\leftarrow} W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}).$$

Pour tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathbb{P}$, $c_1(\mathscr{L})$ soit l'image de la classe de $\mathscr{L}$ par ce morphisme et sera appelée la première classe de Chern logarithemique de $\mathscr{L}$.

Soit $M_\bullet \in D(\mathbb{Z}/p^\bullet - \text{pro-Mod})$. On a induit par l'dentification $\Gamma(\mathbb{P}, M_\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p^\bullet}(\mathbb{Z}/p^\bullet, M_\bullet)$ un isomorphisme canonique de foncteurs dérivés

$$R\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p^\bullet-\text{pro-Mod}}(\mathbb{Z}/p^\bullet, M_\bullet) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathbb{P}, R\lim_{\leftarrow} M_\bullet).$$

Par passage à la catégorie dérivée on obtient pour $M = W\Omega$

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathbb{Z}/p^\bullet-\text{pro-Mod})}(\mathbb{Z}/p^\bullet, W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}[i]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}, R\lim_{\leftarrow} W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}.$$

En particulier pour $i=1$, la cible de c_1 s'identifie avec des morphisme dans $D(\mathbb{Z}/p^\bullet - \text{pro-Mod})$. Pour le fibré canonique $\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)$ on a

$$c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1)) : \mathbb{Z}/p^\bullet \to W_\bullet \Omega^1_{\mathbb{P},\log}[1].$$

Par produit tensoriel pour tout $i \in \mathbb{N}_0$

$$c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1))^i : \mathbb{Z}/p^\bullet \to W_\bullet \Omega^i_{\mathbb{P},\log}[i].$$

On obtient un morphisme dans $D(W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log} - \text{pro-Mod})$

$$\oplus_i = 0^r c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1))^i : \oplus_{i=0}^r W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log}(-i)[-i] \to W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log}.$$

Par adjonction

$$\mathrm{adj} : W_\bullet \Omega^\bullet_{X,\log} \to R\pi_* W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log},$$

on obtient un morphisme dans $D(W_\bullet \Omega^\bullet_{X,\log} - \text{pro-Mod})$

$$\mathrm{adj} \circ R\pi_* \left(\oplus_i = 0^r c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1))^i\right) : \oplus_{i=0}^r W_\bullet \Omega^\bullet_{X,\log}(-i)[-i] \to R\pi_* W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log}.$$

Le théorème fondamental est :

Théorème 2.1.1. *Le morphisme que l'on vient de définir est un isomorphisme.*

Avant de démontrer le théorème, déduisont quelques résultats.

Corollaire 2.1.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ on a un isomorphisme canonique de $D(W_n\Omega^\bullet_{x,\log} - Mod)$*

$$\oplus_{i=0}^r W_n\Omega^\bullet_{X,\log}(-i)\,[-i] \xrightarrow{\sim} R\pi_* W_n\Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log},$$

en prenant le produit tensoriel avec $\mathbb{Z}/p^n$.

Démonstration : On applique la formule de projection

$$(R\pi_* W_\bullet \Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log})\hat{\otimes}\,\mathbb{Z}/p^n \xrightarrow{\sim} R\pi_*\left(W_\bullet\Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log}\hat{\otimes}\,\mathbb{Z}/p^n\right)$$

et le résultat de la première section. □

Si on applique le foncteur $\mathrm{H}^j(X,\cdot)$ à l'isomorphisme du théorème on obtient

Corollaire 2.1.3. *On a un isomorphisme de $\mathbb{Z}/p^n$-modules*

$$\oplus_{i=0}^r \mathrm{H}^{j-i}\left(X, W_n\Omega^{\bullet-i}_{X,\log}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^j\left(\mathbb{P}, W_n\Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log}\right).$$

Exemple 2.1.4. Pour $X = \operatorname{Spec} k$ et $\mathscr{E} = k^{r+1}$ on obtient

$$\mathrm{H}^j(\mathbb{P}^r_k, W_n\Omega_{\mathbb{P}^r_k,\log}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \text{ où } i > r \\ \mathbb{Z}/p^n.c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r_k}(1))^i & \text{pour } i \in [0,1] \end{cases}$$

2.2 Démontration du Théorème fondamental

2.3 Classes de Chern log-cristalline

Une fois la formule de fibré projectif établi, il est facile de donner des classes de Chern :
La formule nous dit que chaque élément de $\mathrm{H}^j\left(\mathbb{P}, W_n\Omega^\bullet_{\mathbb{P},\log}\right)$ a une décomposition unique si on fixe un coefficient, en particulier, si ξ denote la classe de $c_1(\mathscr{O}_\mathbb{P}(1))$, on a comme dans le cas classique

$$\xi^{r+1} = \sum_{i=1}^{(} -1)^{i+1} c_i(\mathscr{E})\xi^{r+1-i}$$

avec $c_i(\mathscr{E}) \in \mathrm{H}^i(X, W_n\Omega^{\bullet-i}_{X,\log}$ les coefficients appropriés, et $c_0(\mathscr{E}) = 1$.

Il faut montrer : l'unicité (c'est évident), la fonctorialité et l'additivité. L'additivité est la seule propriété qui n'est pas évident de la construction.

Les classe de Chern logarithmique sont compatibles aux classes de Chern cristallines induit par l'injection canonique

$$W_n\Omega^i_{X,\log}(-i) \to W_n\Omega^\bullet_X.$$

Références

[1] Cisinski, D.-C. ; Déglise, F. : *Mixed Weil Cohomologies.* arXiv :0712.3291v3 [math.AG], (2007).

[2] Gillet H. : *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory.* Advances in Mathematics 40,203-289, (1981).

[3] Gros M. : *Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique.* Mémoires de la S.M.F. 2e série, tome 21, 1-87, (1985).

[4] Grothendieck, A. : *La théorie de classes de Chern.* Bulletin de la S. M. F., tome 86, 137-154, (1958).

[5] Weibel, C.A. : *Algebraic K-theory.* http ://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html, (2011).