A l'origine, les polygone de Newton étaient des polygones dans le plan euclidien associés à un polynôme sur un corps valué. Ils encode des informations sur la factorisation d'un polynôme et la localisation de ses racines. (Des cas importants de coefficient sont, par exemple, les corps locaux non-archimédiens ou les séries de Laurent sur un corps fini.) Cela donne des pistes que ce concepte serait utile pour des questions de ramification – et s'est avéré.

Il se trouve que ce concepte peut être généralisé à des séries à coefficients dans un corps valué comme avant.

Dans ses notes, on va commencer par donner une définition génerale, qui est valable dans les deux cas. Puis, on prendra des exemples (plus ou moins) concrets qui mettent en relief pourquoi les polygone de Newton constituent un méthode assez puissants.

1 Définition

1.1 Polynôme sur un corps valué

Soit K un corps valué avec valuation ν_K. Soit $P(x)$ un polynôme sur K de degré n, sans perte de généralité, on suppose que $P(0) = 1$, c'est-à-dire

$$P(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

On considère les points

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 \\ A_i &= (i, \nu_K(a_i)) \end{aligned}$$

pour tout $1 \geqslant i \geqslant n$ où $a_i \neq 0$. Le polygone de Newton de P est alors la frontière inférieure de l'enveloppe convexe de cet ensemble de points dans le plan euclidien.

Question : Est-ce que cela se généralise à des polynôme en plusieurs indéterminés ?

1.2 Séries formelles sur un corps valué

Soit K un corps valué avec valuation ν_K. Soit $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ une série formelle sur K. La définition est similaire à celle pour un polynôme. Le polygone de Newton associé à $F(x)$ est l'enveloppe convexe des points

$$A_i = (i, \nu_K(a_i))$$

dans le plan euclidien.

On peut géméraliser cela à des séries de Laurent $K[\![x]\!][\frac{1}{x}$.

Les polygone de Newton pour les séries formelles encode aussi des information sur des condition de convergence et surconvergence. Par exemple, on peut facilement déduire le rayon de convergence des pentes.

1.3 Vecteurs de Witt

Comme on peut représenter les vecteurs de vite comme séries formelles, on est amené à transferer le concept de polygones de Newton dans ce contexte aussi.

Soit A un corps de charactéristic p et W les vecteurs p-typique à coefficients dans A. Alors tout élément de W a une représentation unique

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} [x_n] p^n$$

avec $x_n \in A$. Alors le polygone de Newton est l'enveloppe convexe inférieure des points

$$A_i = (i, \nu_p(x_i)).$$

Il existe des généralisation différentes adapté à la situation specifique et on va donner quelques exemples de la litératur récente pour illustrer ça.

2 Exemples

2.1 Polynômes

Soit k un corps parfait de charactéristique $p > 0$, $W = W(k)$ et $K = \operatorname{Frac} k$. Notons σ l'automorphisme de Frobenius de W.

On considère des F-cristaux sur k, c'est-à-dire des W-modules libre (de type fini) M munis d'une application $\phi : M \to M$ σ-linéaire injective.

Soit $W_\sigma[T]$ l'anneau non-commutatif des polynômes en T avec la relation $T\alpha = \sigma(\alpha)T$ pour $\alpha \in W$. Soit $0 \neq \alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}_+$, premier entre eux. On définit

$$M_\alpha = W_\sigma[T]/(T^s - p^r)$$

avec $\phi(m) = Tm$ pour $m \in M_\alpha$, qui est une application ϕ-linéaire injective. On dit que M_α est un F-cristal de pente α.

Ce sont essentiellement les éléments constitutifs de la catégorie de F-cristaux : Par un théorème de Dieudonné-Manin, la catégorie de F-isocristaux (sur k algébriquement clos) à isogénie près est semi-simple et ses objets simples sont les M_α.

Donc, un F-cristal est isogène à une somme directe

$$\oplus_{\alpha\in\mathbb{Q}_+} M_\alpha^{n_\alpha}$$

Les α tels que $n_\alpha \neq 0$, sont les pentes et l'entier $n_\alpha \dim_W(M_\alpha)$ est la multiplicité de α.

Si k n'est pas algébriquement clos, les pentes de M seraient les pentes de $M \otimes W(\overline{k})$.

Soit M un F-cristal sur k et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_t$ les pentes, λ_i la miltiplicité de α_i et $r = \operatorname{rank} M$. Le polygone de Newton de M est la fonction continue convexe, affine par morceaux,

$$\mathrm{Nw}_M(t) : [0, r] \to \mathbb{R}$$

telle que $\mathrm{Nw}_M(0) = 0$ et dont les pentes soient α_1 pour $0 \leqslant t \leqslant \lambda_1$, α_2 pour $\lambda_1 \leqslant t \leqslant \lambda_1 + \lambda_2$ etc.

Si on compare cette définition avec la définition de plus hauts pour les polynômes on trouve le suivant.

Le polygone de Newton pour M_α, $\alpha = \frac{r}{s}$ est le polygone de Newton pour le polynôme $1 - p^{-r}T^s$ entre 0 et λ (la multiplicité), autrement dit, le polygone du polynôme $1 - (p^{-r}T^s)^\lambda$. Et comme on prend l'enveloppe inférieure des points, le polygone de Newton de M est le polygone de Newton du polynôme $(1 - (p^{r_1}T^{s_1})_1^\lambda) \cdot \ldots \cdot (1 - (p^{r_t}T^{s_t})_t^\lambda)$.

On peut lier cela au polygone de Hodge :

Soit

$$M/\varphi(M) = \bigoplus_{i\geqslant 1} (W/p^iW)_i^h$$

la décomposition de $M/\varphi(M)$, et posons $h_0 = \operatorname{rank} M - \sum h_i$. Les h_i s'appellent les nombres de Hodge de M et le polygone de Hodge de M est la fonction continue croissante convexe $\mathrm{Hdg}_M(t)$ telle que $\mathrm{Hdg}_M(0) = 0$, telle qu'elle soit de pente 0 sur $[0, h_0]$, de pente 1 sur $[h_0, h_1]$ etc. Deux F-cristaux isogène ont le même polygone de Newton, mais pas forcément le même polygone de Hodge. Le polygone de Newton est au-dessus du polygone de Hodge [1, Prop. 2.2]. Ce polygone est aussi appellé le polygone de Hodge «abstrait»afin de le distinguer du polygone de Hodge «géométrique ». Ce dernier est construit de la même manière, sauf que les nombres de Hodge sont remplacés par les nombres de Hodge géométriques

$$\widetilde{h}_i = \dim_k \mathrm{H}^{m-i}(X, \Omega^i_{X/k}).$$

Ce polygone de Hodge géométrique se trouve de même en dessous du polygone de Newton, et on a égalité au polygone de Hodge abstrait si $\mathrm{H}^m_{\mathrm{cris}}(X/W)$ est sans p-torsion et si la suite spectrale Hodge vers de Rham dégénère en E_1 (un théorème de Mazur-Ogus-Nygaard).

Cette théorie donne des résultats en ce qui concerene le problème de ‹compter points›. Le suivant est un résultat à la Chevalley-Warning.

Corollaire 2.1. *Soit $k = \mathbb{F}_q$, X/k une intersection complète lisse de dimension d dans $\mathbb{P}_k^{d+n}$ Alors le nombre de points de $X(\mathbb{F}_{q^s})$ est égal au nombre de points de $\mathbb{P}^d(\mathbb{F}_{q^s})$ modulo q^{cs} où c est le plus petit entier $i \geqslant 0$ tel que* $\dim \mathrm{H}^{d-i}(\Omega^i_{X/k}) \neq 0$.

Démonstration : Le cas $s = 1$ suffit. Par le théorème de Lefschetz faible (Lefschetz hyperplane theorem) la cohomologie cristalline de X et $\mathbb{P}^d$ coincident sauf en degré moitié, c'est-à-dire, pour H^d.

Il est bien-connu que la connaissance de la fonction zêta de X

$$Z(X/k, t) = \prod_{\substack{x \in X \\ \text{fermé}}} \frac{1}{1 - t^{\deg x}}$$

équivaut à celle du nombre de points rationnels distincts de X sur toutes les extensions finies de k . En outre, par la formule de trace de Lefschetz on a

$$Z(X/\mathbb{F}_q, t) = \prod_{i=0}^{2d} \det(1 - F_q t|_{\mathrm{H}^i(X/W)\otimes K})^{(-1)^{i+1}}.$$

Par conséquent, il suffit de démontrer que

$$\frac{\det(1 - F_q|_{\mathrm{H}^d(\mathbb{P}^d/W)})}{\det(1 - F_q|_{\mathrm{H}^d(X/W)})} \equiv 1 \mod q^c$$

Or, le numérateur est 1 si d est impair et $1 - q^{d/2}$ si d est pair. La dualité de Serre entraîne la symétrie des nombres de Hodge pourles intersections complètes, et donc $c \leqslant \frac{d}{2}$. Donc il suffit de montrer que $\det(1 - F_q|_{\mathrm{H}^d(X/W)}) \equiv 1 \mod q^c$.

Par définition de c, $c \leqslant \widetilde{h}_i$, et donc les pentes de polygone de Hodge sont supérieures ou égales à c, il en est donc de même pour les pentes du polygone de Newton de $\mathrm{H}^d(X/W)$, si bien que les valeurs propres de F_q (c'est-à-dire les racines des polynômes $T^{s_i} - q^{r_i}$ sont de valuation $\geqslant v(q^c)$. D'où l'énoncé. □

2.2 Vecteurs de Witt

Soit $E/\mathbb{Q}_p$ une extension finie, $\mathbb{F}_q$ sont corps résiduel, $q = p^{f_E}$. On choisit une uniformisante π de $\mathscr{O}_E$, Frob_q le morphisme de Frobenius à la puissance f_E. Soit $k/\mathbb{F}_q$ un corps algébriquement clos de charactéristique p, F/k algébriquement clos de charactéristique p, valué complet pour une valuation non-triviale $v : F \to \mathbb{R} \cup \infty$ telle que v soit triviale sur k, $\mathfrak{m}_F$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_F$ et $k \to \mathscr{O}_F / \mathfrak{m}_F$ identifié au corps résiduel.

On note $W_{\mathscr{O}_E,\pi}$ le foncteur $\mathscr{O}_E$-vecteurs de Witt par rapport à π sur les $\mathscr{O}_E$-algèbres (voir [2, Section 5.1]). Comme dans le cas classique p-adique on a des applications phantômes qui donne un morphisme

$$W_{\mathscr{O}_E,\pi}(A) \to A^{\mathbb{N}}$$

On peut prendre la limite projective sur toutes les uniformisantes π pour obtenir un fonteur

$$W_{\mathscr{O}_E} = \varprojlim W_{\mathscr{O}_E,\pi}$$

de $\mathscr{O}_E$-algèbres. L'application phantome, $w : W_{\mathscr{O}_E}(A) \xrightarrow{\sim} W_{\mathscr{O}_E,\pi} \to A^{\mathbb{N}}$ ne dépend pas du choix de π. On dispose aussi d'un relèvement de Teichmüller

$$[--] : A \to W_{\mathscr{O}_E}(A)$$

indépend du choix de π. Si A est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfait, $W_{\mathscr{O}_E}(A)$ est π-adiquement complet sans π-torsion, et tout élément s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{n \geqslant 0} [x_n] \pi^n.$$

On note

$$B_E^{b+} = W_{\mathscr{O}_E}(\mathscr{O}_F)\left[\frac{1}{\pi}\right]$$

et φ_E son morphisme de Frobenius. L'anneau $\mathscr{O}_F$ étant parfait, tout élément $x \in W_{\mathscr{O}_E}(\mathscr{O}_F)$ s'écrit de façon unique de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0}[x_n]\pi^n$$

et alors tout élément de $B^{b,+}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum n \gg -\infty[x_n]\pi^n$$

et on a

$$\varphi\left(\sum n \gg -\infty[x_n]\pi^n\right) = \sum n \gg -\infty[x_n^q]\pi^n$$

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $x = \sum n \gg -\infty[x_n]\pi^n$ on pose

$$v_r(x) = \inf_{i\in\mathbb{Z}}\{v(x_i) + ir\} \in \mathbb{R}\cup\infty.$$

On peut montrer que cette définition ne dépend du choix de π. Il y a une différence notable entre $v_{r>0}$ et v_0 : la borne inférieure intervenant dans la formule est atteinte pour $r > 0$, ce qui n'est pas forcément le cas pour $r = 0$. Enfin,

$$v_0(x) = \lim_{r\to 0} v_r(x).$$

On montre que pour tout $r \geqslant 0$ v_r est une valuation sur $B^{b,+}$. Pour $r > 0$ elles sont continues tandisque ce n'est pas le cas pour $r = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} v_r(x) &= v_0(x)\\
\lim_{r\to\infty}\frac{v_r(x)}{r} = v_\pi(x)&\\
v_r(\phi(x)) &= qv_{\frac{r}{q}}(x)
\end{aligned}$$

Pour $0 < r \in v(F)$ on note

$$S_r = \left\{x \in B^{r,+} \;\middle|\; v_r(x) \geqslant 0\right\}$$

et $\widehat{S}_r$ son complété p-adique. Pose

$$B_r^+ = \widehat{S}_r\left[\frac{1}{p}\right]$$

C'est un espace de Banach qui est le complété de $B^{b,+}$ pour la valuation v_r. On note

$$B^+ = \bigcap_{r>0} B_r^+$$

Pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\infty$ sa transformé de Legendre est

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\varphi) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\\
\lambda &\mapsto \inf\{\varphi(x) + \lambda x \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

C'est une fonction concave, si φ est convexe, on peut retrouver φ à partir de $L(\varphi)$.

On appelle pente d'un polygone l'opposé de la dérivé de la fonction affine par morceau associée (c'est une convention pour identifier les pentes d'un polygone de Newton aux valuations des racines).

Une fonction φ est un polygone à abcisse de ruptures entières ssi $\mathscr{L}(\varphi)$ est une fonction localement affine sur le segment $\neq -\infty$ à pentes entières. Les pentes de $\mathscr{L}(\varphi)$ sont les abcisse de points de ruptures de φ et les points de ruptures de $\mathscr{L}(\varphi)$ sont les pentes de φ.

Pour $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \infty$ on pose

$$\begin{aligned} \varphi_1 * \varphi_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \cup \infty \\ x &\mapsto \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(b) \mid a + b = x\} \end{aligned}$$

Alors

$$\mathscr{L}(\varphi_1 * \varphi_2) = \mathscr{L}(\varphi_1) + \mathscr{L}(\varphi_2)$$

On déduit que si φ_1 et φ_2 sont des polygones décroissants convexes à abcisses de ruptures entières bornés inférieurement $\varphi_1 * \varphi_2$ en est également un et ses pentes finiesstrictement positives sont obtenues en concatenant celles de φ_1 et φ_2. C'est un analogue tropical de l'opération de convolution usuelle.

Définition 2.2. Soit $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \in B^{b,+}$. On note $\mathrm{Nw}(x)$ le plus grand polygone convexe décroissant dans le plan euclidien en dessous des points $(n, v(x_n))$

On a les formules

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \mathrm{Nw}(b)(x) &= v_0(b) \\ \mathrm{Nw}(b)^{-1}(\infty) &=]-\infty, v_\pi(b)] \end{aligned}$$

Le polygone $\mathrm{Nw}(b)$ est donné par $v_\pi(b)$ comme «point de départ»et par les pentes λ_i

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \infty \quad \text{pour } i < v_\pi(b) \\ \lambda_i &\geqslant \lambda i + 1 \quad \text{pour tout } i \end{aligned}$$

Pour $b = \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \in B^{b,+}$ la transformée de Legendre de son polygone de Newton est donnée par

$$\mathscr{L}(\mathrm{Nw}(b))(\lambda) = \begin{cases} v_\lambda(b) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

En particulier, le polygone de Newton ne dépend pas du choix de l'uniformisante π. Comme $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$, on déduit que

$$\mathrm{Nw}(xy) = \mathrm{Nw}(x) * \mathrm{Nw}(y).$$

Sans restriction sur les éléments, le comportement du polygone de Newton en ∞ et le comportement de sa transformée de Legendre en 0 peut être assez sauvage. On vera plus tard, que cela peut être controller par des condition de convergence/surconvergence.

Le polygone de Newton sur l'anneau $B^{b,+}$ s'étend à B^+, et on a le résultat suivant [2, Proposition 5.33].

Proposition 2.3. *Un élément $b \in B^+$ est dans $B^{b,+}$ ssi il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Nw}(b)\big|_{]-\infty, A[} \equiv \infty$.*

Pour simplicité, on va se ramener au cas où $E = \mathbb{Q}_p$. Dans la suite, la notation est celle de [4]. Dans ce cas, $\mathbb{F}_p$ joue le rôle de k, et $\widetilde{E}$ joue le rôle de F. (C'est la complétion du clôture parfait de $\mathbb{F}_p((\overline{\pi}))$.) Soit $\widetilde{A}$ l'anneau de vecteurs de Witt p-adique de $\widetilde{E}$. Une différence principale à la situation précédente est que maintenant on prend le corps $\widetilde{E}$ lui-même au lieu de son anneau de valuation. Soit $\widetilde{A}^{\dagger,r}$ le sous-anneau de $\widetilde{A}$ tel que tout élément $\sum_{n=0}^{\infty} [\overline{x}_n] p^n$ satisfasse la condition

$$\lim_{n \to \infty} p^{-n} |\overline{x}_n|^r = 0$$

et $\widetilde{A}^\dagger$ soit la réunion des $\widetilde{A}^{\dagger,r}$ sur tous $r > 0$.

En particulier, la définition de $\widetilde{A}^{\dagger,r}$ est une autre manière de dire que tout élément a r comme «rayon de convergence». Il suit que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\overline{x}_{n-1}|}{|\overline{x}_n} = p^{-\frac{1}{r}},$$

autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v(\overline{x}_n) - v(\overline{x}_{n-1})} = -r$$

et on ne perd rien en se ramener à

$$0 > \frac{1}{v(\overline{x}_n) - v(\overline{x}_{n-1})} \geqslant -r.$$

On va procéder à interprêter cela comme pentes d'un polygone de Newton.

Pour ce but on change les conventions de plus haut un peu. Soit $x = \sum_{n=0}^{\infty} [\overline{x}_n] p^n \in \widetilde{A}^{\dagger,r}$. On reflète maintenant le polygone de Newton d'avant à la diagonal en prennant l'enveloppe convexe inférieure de l'ensemble de points $(v(\overline{x}_n), n)$. Les pentes de ce polygone son données par

$$\frac{n-(n-1)}{v(\overline{x}_n) - v(\overline{x}_{n-1})} = \frac{1}{v(\overline{x}_n) - v(\overline{x}_{n-1})}$$

et dáprès que l'on a dit plus haut, sans perte de généralité, on omet les pentes en dehors de $[-r, 0)$.

On déduit que le polygone de Newton définit ci-dessus n'a qu'un nombre fini de pentes : Pour tout élement $x \in \widetilde{A}^{\dagger,r}$ comme on a déjà remarqué

$$0 > \frac{1}{v(\overline{x}_n) - v(\overline{x}_{n-1})} \geqslant -r$$

mais on a plus. Et ce point est d'ailleurs le même pour la première définition. La «- première»pente est 0 dans cette définition et ∞ dans la définition précédents. La «zéroième»pente est quelque chose comme $0 > -r_0 \geqslant -r \geqslant 1$ dans cette définition et un nombre entier $\lambda_0 \geqslant \frac{1}{r}$ dans la première définition. Toutes les autres pentes se trouvent entre les deux. Dans la définition de plus haut, ce sont des nombres entiers, donc il en existe seulement un nombre fini. Dans la définition plus récente, ce sont simplement leurs inverses.

Le fait qu'il existe seulement un nombre fini de pente est un dispositif assez puissant pour quelques démonstrations.

Références

[1] Chambert-Loir A. *Cohomologie cristalline : un survol.* Expositiones Mathematicae **16** (4), 333-382, (1998).

[2] Fargues L. Fontaine J.-M. : *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique.* Prépublication (2011).

[3] Illusie, L. : *Complex de deRham-Witt et cohomologie cristalline.* Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 12, No. 4, 501-661 (1979).

[4] Kedlaya K.S. : *Rational Structures and (φ, Γ)-modules.* Prépublication, (2013).