1 Cohomologie d'un complexe de faisceau

Il est possible de construire des groupes de cohomologie non seulement pour un faisceau soi-même, mais pour un complexe de faisceaux. On l'appelle **l'hypercohomologie** pour la distinguer de la cohomologie ordinaire.

L'idée est de considerer pour un complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet$ le bicomplexe $C^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)$, où $C^\bullet$ designe la derivée de droite d'un foncteur C^0. (On en parlera plus tard.) Ensuite, on prend le complexe total de ce bicomplexe: $\mathcal{K}^\bullet = \mathrm{tot}(C^\bullet(\mathcal{F}^\bullet))$. Le complexe originarie se plonge dans le complexe totale, et en plus c'est un quasi-isomorphisme. La cohomologie du complexe associé de sections globales $\mathcal{K}^\bullet(X)$ est l'hypercohomologie de $\mathcal{F}^\bullet$ et on la denote

$$\mathbb{H}^\bullet(X, \mathcal{F}^\bullet).$$

L'hypercohomologie est fonctorielle en la catégorie de complexes et toute suite exacte courte donne lieu à une suite exacte longue. Au cas où le complexe $\mathcal{F}^\bullet$ ne se compose que d'un seul faisceau $\mathcal{F}$ l'hypercohomologie de $\mathcal{F}^\bullet$ et la cohomologie de faisceau de $\mathcal{F}$ coïncident.

2 Suites spectrales associées

Le bi-complexe $C^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)$ (comme tout bi-complexe) induit deux suites spectrales dont la limite est l'hypercohomologie (au cas où $\mathcal{F}^\bullet$ est bornée de bas – le seul cas qui est important). La première suite spectrale:

$$'E_2^{pq} = \mathrm{H}^p(X, \mathrm{H}^q(\mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^n(X, \mathcal{F}^\bullet).$$

On voit alors que $\mathbb{H}^\bullet(X, \mathcal{F}^\bullet) = 0$ si $\mathcal{F}^\bullet$ est acyclique, c'est à dire si $\mathrm{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet) = 0$. En plus, on voit (avec le cône d'un morphisme) qu'un quasi-isomorphisme de complexes induit un isomorphisme au niveau d'hypercohomologie.

Maintenant la deuxième suite spectrale:

$$''E_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}^\bullet)) \Rightarrow \mathbb{H}^n(X, \mathcal{F}^\bullet).$$

Si les faisceau de $\mathcal{F}^\bullet$ sont ascycliques, cette suite spectrale se dégénère et on obtient un isomorphisme

$$\mathbb{H}^n(X, \mathcal{F}^\bullet) \cong \mathrm{H}^n(\mathrm{H}^0(X, \mathcal{F}^\bullet)).$$

La comparaison des deux suites spectrales donne une

Proposition 2.1. *Soit $K^\bullet$ une résolution asyclique d'un faisceau $\mathcal{F}$. Alors*

$$\mathrm{H}^n(X, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^n(K^\bullet(X))$$

pour tout n.

Cela montre qu'il suffit de prendre une résolution arbitraire acyclique au lieu de la résolution canonique $C^\bullet$.

Exemple 2.2. Le complex de deRham pour une variété topologique X: Le complexe

$$0 \to \mathbb{R}_X \to \Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d}$$

est exacte par le lemme de Poincaré. D'après Godement les faisceau Ω^r sont acyclique. Il suit le théorème de deRham

$$\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{deRham}}(\Omega_X^\bullet) = \mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{R}_X).$$

3 La résolution canonique

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau arbitraire de X. Considère le faisceau $C^0(\mathcal{F})$ donne par

$$C^0(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x.$$

Il y a un plongement canonique $\mathcal{F} \hookrightarrow C^0(\mathcal{F})$. Le faisceau $C^0(\mathcal{F})$ est toujours flasque, et dans le cas d'une catégorie abélienne le foncteur C^0 est exacte.

Dès maintenant, tous nos faisceaux soient abéliens. On construit une résolution flasque de Godement $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} C^\bullet(\mathcal{F})$ à l'aide de C^0 comme suit:

- On a déjà $\mathcal{F} \hookrightarrow C^0(\mathcal{F})$.
- On pose $C^1(\mathcal{F}) = C^0\left(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}\right)$.
- Et pour $n \geq$ par récurrence $C^{n+1}(\mathcal{F}) = C^0(C^n(\mathcal{F})/dC^{n-1}(\mathcal{F}))$.

La différentielle induit est

$$C^n(\mathcal{F}) \to C^n(\mathcal{F})/dC^{n-1}(\mathcal{F}) \to C^0(C^n(\mathcal{F})/d^{n-1}(\mathcal{F})) = C^{n+1}(\mathcal{F}).$$

La cohomologie de faisceaux de $\mathcal{F}$ peut être définie comme la cohomologie de ce complexe.

4 Bi-complexes

Un complexe double où bi-complexe $L = (L^{ij}, d_I^{ij}, d_{II}^{ij})$ est une collection

- d'objets L^{ij}
- de morphismes $d_I^{ij} : L^{ij} \to L^{i+1,j}$, $d_{II}^{ij} : L^{ij} \to L^{i,j+1}$ satisfaisant aux relations
$$d_I^2 = d_{II}^2 = d_I d_{II} + d_{II} d_I = 0.$$

On denote

$$(SL)^n = \mathrm{tot}(L)^n = \bigoplus_{i+j=n} L^{ij}$$

le complexe total (si la somme existe, ce qui est le cas dans la plupart des situations intéressantes). Il s'ensuit des conditions en les différentielles que l'opérateur induit

$$d = d_I + d_{II} : (SL)^n \to (SL)^{n+1}$$

satisfait á la condition $d^2 = 0$ de sorte que $((SL)^\bullet, d)$ est bel et bien un complexe.

Morphismes de bi-complexes sont définis de la façon évidente.

On peut considérer deux cohomologies "doubles" d'un bi-complexe

$$\mathrm{H}_{II}^j\left(\mathrm{H}_I^{i,\bullet}(L^\bullet)\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_I^i\left(\mathrm{H}_{II}^{\bullet,j}(L^\bullet)\right).$$

References

[1] Danilov, V.I.: *Cohomology of algebraic varieties.*In Shafarevich,I.R. (ed.): *Algebraic Geometry II.* Encyclopeadia of Mathematical Sciences 35, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).

[2] Gelfand, S.I.; Manin, Yu.I.: *Methods of Homological Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).