1 Foncteur dérivé de la composition

Définitio 1.1. Une classe d'objets $\mathcal{R} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ est dite adaptée à un foncteur exacte (à gauche ou à droite) F si elle est stable sous sommes directes finies et satisfait aux conditions suivantes :

1. Pour F exacte à gauche (/à droite) : F envoie un complexe acyclique de $\operatorname{Kom}^+ \mathcal{R}$ (/$\operatorname{Kom}^- \mathcal{R}$) dans un comolexe acyclique.
2. Pour F exacte à gauche (/à droite) : tout objet de $\mathcal{A}$ est un sous-objet (/quotient) d'un objet de $\mathcal{R}$.

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs exactes á gauche. Soit $\mathcal{R}_\mathcal{A} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ etc. une classe d'objets adaptée à F (G resp.) et $F(\mathcal{R}_\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}_\mathcal{B}$. Alors les foncteurs dérivés RF, RG, $R(G \circ F)$ existent et le morphisme naturel de foncteur*

$$E : R(G \circ F) \to RG \circ RF$$

est un isomorphisme.

On obtient un résultat similaire pour les foncteurs exactes à droite.

Dans la théorie classique, on considère plutôt $R^i(G \circ F)$ et $R^pG(R^qF)$ d'un objet. Ces deux groupes sont reliés par une suite spectrale. Plus précisément, dans cette situation, une suite spectrale encode (tout en perdant quelques informations) l'isomorphisme de foncteurs E.

2 Suites spectrales abstraites

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une suite spectrale dans $\mathcal{A}$ consiste
– d'une famille d'objets dans $\mathcal{A}$ de la forme $E = (E_r^{pq}, E^n)_{p,q \in \mathbb{Z}\,;\, r \in \mathbb{N}}$,
– de morphismes ($d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, $\alpha_r^{pq} : \mathrm{H}^{pq}(E_r) \to E_{r+1}^{pq}$ où $\mathrm{H}^{pq}(E_r) = \operatorname{Ker} d_r^{pq} / \operatorname{Im} d_r^{p+r,q-r+1}$,
– d'une filtration décroisante sur E^n $\forall n$,
soumis aux conditions suivantes :

1. $d_r^2 = 0$ ce qui fait de $\mathrm{H}^{pq}(E_r)$ la cohomologie de la r$^{\text{ième}}$ feuille.
2. Les α_r^{pq} sont des isomorphisme (d'où on peut calculer les feuilles par récurrence).

Et les conditions optionelles

3. L'existence d'un objet de limite (sous les α's) E_∞^{pq} – la dernière feuille.
4. Pour toute paire (p, q) $\exists r_0$ tel que $d_r^{pq} = d_r^{p+r,q-r+1} = 0 \forall r \geq r_0$. Dans ce cas, tous les E_r^{pq} s'identifient pour $r \geq r_0$ et on denote cela par E_∞^{pq}.
5. Les filtration sur les E^n relient les objets sur la dernière feuille : les E_∞^{pq} et les E^n (sur la diagonale) : Elles soient régilières et on dispose d'isomorphismes $E_\infty^{pq} \to F^pE^{p+q}/F^{p+1}E^{p+q}$.

On dit que «la suite spectrale (E_r^{pq}) converge vers (E^n) .»

Théorème 2.1. *Sous les conditions du théorème précédent, soit $\mathcal{R}_\mathcal{A} = \mathcal{I}_\mathcal{A}$ et $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ assez large. Alors pour tout $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ il existe une suite spectrale*

$$E_r^{pq} = R^pG(R^qF(X))$$

qui converge vers $E^n = R^n(G \circ F)(X)$.

Dans les application, il se produit souvent (si on travaille avec des compplexes bornés) que les seules objets non-zéros d'une suite spectrale se trouve dans un seul quadrant. Plus d'objets zéros, plus facile la calculation. On dit que E se dégénère à E_r si $d_{r'}^{pq} = 0$ pour $r' \geq r$ et $\forall p, q$.

Un morphisme de suites spectrales soit compatible aux structures mentionnées. Cela fait des suites spectrales une catégorie additive (mais en général non. abélienne).

3 Calculer des suites spectrales

Tout en étant facile la calculation d'une suite spectrale d'un complexe filtré est pénible en général (les filtration canoniques ou stupides sont ok).

Pour un bi-complexe on obtient deux suites spectrales. Si on fixe l'un des superscript, on peut calculer deux cohomologie. En les composant, on obtient

$$\mathrm{H}^j_{II}\left(\mathrm{H}^{i\bullet}_I(L^{\bullet\bullet})\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^i_I\left(\mathrm{H}^{\bullet j}_{II}(L^{\bullet\bullet})\right)$$

de façon évidente. On a deux filtrations décroisantes

$$F^p_I(\mathrm{tot}(L))^n = \bigoplus_{i+j=n, j\geq p} L^{ij} \qquad \text{et} \qquad F^q_{II}(\mathrm{tot}(L))^n = \bigoplus_{i+j=n, i\geq q} L^{ij}.$$

La construction d'une suite spectrale pour un complexe filtré produit donc deux suites spectrales : $'E^{pq}_r$ et $''E^{pq}_r$. Si les filtrations de ces suites spectrales sont finies et regilères, les suites spectrales convergent à une limite commune $\mathrm{H}^n(\mathrm{tot}(L))$. On peut computer les termes de la deuxième feuille :

Proposition 3.1. *On a* $'E^{pq}_2 = \mathrm{H}^q_I\left(\mathrm{H}^{\bullet p}_{II}(L^{\bullet\bullet})\right)$, $''E^{pq}_2 = \mathrm{H}^p_{II}\left(\mathrm{H}^{q\bullet}_I(L^{\bullet\bullet})\right)$.

C'est utilisé pour la hypercohomologie par exemple. Soit G un foncteur, L un double complexe. Alors, l'hypercohomologie de G par rapport à L est la limite de la suite spectrale $''E^{pq}_r$ par rapport à la filtration $F^q_{II}G(\mathrm{tot}(L)) = G(F^q_{II}(\mathrm{tot}(L)))$. Pour la cohomologie de deRham par exemple, L est le complexe de deRham, G est le foncteur de sections gobales.

Références

[1] Danilov, V.I. : *Cohomology of algebraic varieties.*In Shafarevich,I.R. (ed.) : *Algebraic Geometry II.* Encyclopeadia of Mathematical Sciences 35, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).

[2] Gelfand, S.I. ; Manin, Yu.I. : *Methods of Homological Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1996).