Soit k un corps parfait de caractéristique p, $\overline{B}$ un anneau lisse affine sur k. On tend à définir un sous-anneau «surconvergent »de l'anneau de vecteur de Witt $W^\dagger(\overline{B}) \subset W(\overline{B})$. Ça se fait en le définir pour les algèbres polynômielles, et puis en l'étendre par fonctorialité au cas génénarl.

1 Vecteurs de Witt surconvergents

1.1 Algèbres polynômielles

On commence par définir

$$W^\dagger(R[x_1,\ldots,x_n]) \subset W(R[x_1,\ldots,x_n])$$

pour R un corps parfait de caractésistique p ou alors un anneau arbitraire de caractéristique 0.

Définition 1.1.1. (ensembliste) $W^\dagger(R[\underline{x}]) \subset R[\underline{x}]^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites polynômielles (f_i) telles qu'il existe un constante $C \in \mathbb{R}$ avec $\deg(f_i) \leq C(i+1)p^i \forall i \geq 0$. La suite s'appelle C-surconvergente ou simplement surconvergente.

Ici, on voit de façon canonique $W(R[\underline{x}]) \subset R[\underline{x}]^{\mathbb{N}}$:

Lemme 1.1.2. *Suppose R de caractéristique 0. Une suite est C-sudconvergente au sense précedant, si et seulement si son image sous l'application fantôme l'est.*

Démonstration : L'image d'une suite (f_i) sous l'application fantôme est

$$(f_0, f_0^p + pf_1, f_0^{p^2} + p^2 f_2, \ldots).$$

Comme on utilise le degré usuel, il est claire que si (f_i) est C-surconvergente son image l'est aussi.

De l'autre côté, on voit par récurrence que

$$\deg(f_i) \leq \deg(f_0^{p^i} + \cdots + p^i f_i)$$

reposant sur $\deg(f_o) \leq \deg(f_0)$, étant donné que $p \neq 0$. □

Maintenant on est en mésure de donner de la structure algébrique à l'ensemble $W^\dagger(R[\underline{x}])$.

Proposition 1.1.3. *R comme plus haut. Le sous-ensemble de vecteurs de Witt surconvergents est en fait un sous-anneau.*

Démonstration : Cas R de caractéristique 0 : Dans $R[\underline{x}]^{\mathbb{N}}$ on a addition et multiplication par composante et il est donc évident que la somme et le produit de deux suites surconvergents sont encore surconvergents. Le constantes deviennent :

- Pour l'addition : $\max\{C_1, C_2\}$.
- Pous la multiplication : $C_1 + c_2$.

Comme l'application fantôme est un morphisme d'anneau, le lemme précédent induit déjà que $W^\dagger(R[\underline{x}]) \subset W(R[\underline{x}])$ est un sous-anneau.

Cas $R = k$ parfait de caractéristique p : On a une surjection évidente

$$W(k)[\underline{x}] \to k[\underline{x}].$$

On vient de raisonner que, du côté de droite, les vecteurs de Witt surconvergents forment un sous-anneau. En plus, l'image d'un élément surconvergent l'est aussi (on simplement annule les termes divisible par p). On note aussi que pour tout élément surconvergent de $k[\underline{x}]$ on trouve au moins une image inverse surconvergente dans $W(k)[\underline{x}]$ (en utilisant le relèvement de Teichlmüller). La surjection canonique induit un morphisme d'anneaux de vecteurs de Witt qui donne lieu à un diagramme commutative

$$\begin{tikzcd} W^\dagger(W(k)[\underline{x}]) \arrow[r] \arrow[d, hook] & W^\dagger(k[\underline{x}]) \arrow[d, hook] \\ W(W(k)[\underline{x}]) \arrow[r] & W(k[\underline{x}]). \end{tikzcd}$$

D'où l'énoncé en général. □

Cela fournit des données supplémentaires qui seront utiles plus tard :

Corollaire 1.1.4. *Les vecteurs de Witt C-surconvergents forment un $W(k)$-sous-module de l'anneau $W^\dagger(k[\underline{x}])$.*

1.2 Quotients des algèbres polynômielles

Étant donnée une présentation $k[\underline{x}]/I$, on est tenté de définir :

Définition 1.2.1. Un élément $w = (w_i) \in W(k[\underline{x}]/I)$ est dit surconvergent de rayon C s'il existe $v \in W(k[\underline{x}])$ surconvergent de rayon C sur w.

Bien entendu, la constante C dépend de la présentation, mais pas la réunion sur tous les C :

Lemme 1.2.2. *L'anneau*

$$W^\dagger(k[\underline{x}]/I) = \bigcup_C W^{\dagger C}(k[\underline{x}]/I)$$

est indépendent de la présentation.

Démonstration : Suppose que l'on dispose d'un isomorphisme

$$\varphi : k[x_1, \dots, x_n]/I \to k[y_1, \dots, y_m]/J.$$

Alors soit d_i le degré minimal parmi les représentatives de $\varphi(x_i)$ dans $k[y_1, \dots, y_m]$ et $d = \max d_i$. Il est donc claire qu'un élément de rayon C soit envoyer vers un élément de rayon dC. □

Maintenant la définition suivante fait du sense :

Définition 1.2.3. Pour $\overline{C} \cong k[\underline{x}]/I$ lisse affine, les vecteurs de Witt surconvergent à coéfficients dans $\overline{C}$ sont l'image de $W^\dagger(k[\underline{x}])$ sous l'application $W(k[\underline{x}]) \to W(\overline{C})$.

2 Complexe de deRham-Witt surconvergent

On se servira de cette définition pour la partie de degré zéro d'un complexe de deRham-Witt surconvergent. On commence par étendre la notion de surconvergence aux éléments du complexe de deRham-Witt.

Définition 2.0.4. On dit que dw est C-surconvergent si w l'est.

La somme d'éléments C_α-surconvergent est $\sup C_\alpha$-surconvergent si celui est fini. Le produit d'un élément C_1-surconvergent et d'un élément C_2-surconvergent est $C_1 + c_2$-surconvergent. Comme plus haut, les éléments de $w\Omega_{k[\underline{x}]}$ dispose de multiples représentations, et donc on dit qu'un élément est surconvergent de rayon C s'il existe au moins un représentation surconvergent de rayon C. On a déjà vérifié les énoncés en degré zéro.

Définition 2.0.5. Le complexe de deRham-Witt surconvergent d'une algèbre polynmielle $k[\underline{x}]$ est la sous-adg de $W\Omega_{k[\underline{x}]}$ contenant les éléments C-surconvergent pour un C. On la denote par

$$W^\dagger\Omega k[\underline{x}].$$

Pour un anneau affine $\overline{B}$ en caractéristique p, on définit $W^\dagger\Omega_{\overline{B}}$ comme l'image de $W^\dagger\Omega_{k[\underline{x}]}$ induite par une présentation

$$k[\underline{x}] \twoheadrightarrow \overline{B}.$$

A priori, la dernière définition dépend de la présentation.

Lemme 2.0.6. *Le complexe $W^\dagger\Omega_{\overline{B}}$ est indépendent de la présentation de $\overline{B}$.*

Démonstration : L'énoncé fut déjà montré en degré zéro. On considère une différentielle $\omega_0 d\omega_1 \dots d\omega_m$ avec $\omega_i \in W^\dagger\Omega^0_{\overline{B}} = W^\dagger(\overline{B})$ de rayon C donné par une présentation. Tour ω_i a un (beaucoup) un rayon de surconvergence C' dépendent de C. Mais comme la réunion en degré zéro sur toutes les C's est indépendent de la présentation et le nombre de termes dans le produit est borné par $\dim \overline{B} + 1$, l'énoncé suit aussitôt. □

Ce complexe est un sous-complexe du compplexe de deRham-Witt ordinaire, mais pas la sous-adg engendrée par les vecteurs de Witt surconvergents en degré zéro (ce qui est le cas pour Monsky-Washnitzer). En fait, ce dernière est un sous-complexe propre du complexe surconvergent.

Dans l'article [2], ils adoptent une notation légèrement différente. Il faut montrer que les deux notions coïncident.

Rappelle la notion d'une différentielle élémentaire : Soit R une $\mathbb{F}_p$-algèbre intègre et $A = R[T_1, \dots, T_d]$. On considère des fonctions de poids $k : [1,d] \to \mathbb{N}_0$ et le support $\operatorname{supp} k = i_1, \dots, i_r$ où on fixe un ordre tel que

1. $\operatorname{ord}_p k(i_1) \leq \operatorname{ord}_p k(i_2) \leq \dots \leq \operatorname{ord}_p k(i_r)$.
2. Si $\operatorname{ord}_p k(i_n) = \operatorname{ord}_p k(i_{n+1})$, alors $i_n \leq i_{n+1}$.

Soit $\mathcal{P} = \{I_0, \dots I_l\}$ une partition de $\operatorname{supp} k$ d'après Langer and Zink. Une différentielle élémentaire est de la forme

$$e(k, \mathcal{P}) = \underline{T}^{k(I_0)} \left(\frac{d\underline{T}^{k(I_1)}}{p^{\operatorname{ord}_p k(I_1)}} \right) \cdots \left(\frac{d\underline{T}^{k(I_l)}}{p^{\operatorname{ord}_p k(I_l)}} \right).$$

These elements form a basis of the deRham complex. On a une descriotion similaire pour les éléments du complexe de deRham-Witt. Maintenant, les fonctions de poid sont fractionelles

$$k : [1,d] \to \mathbb{N}_0[\frac{1}{p}]$$

et il faut tenir compte de coéfficientes $\xi_{k,\mathcal{P}} \in W(R)$ soumises à des conditions de convergence.

Tout élément $\omega \in W\Omega^r_{A/R}$ dispose d'une décomposition unique en différentielles de Witt élémentaire

$$\omega = \sum_{k,\mathcal{P}} e(\xi_{k,\mathcal{P}}, k, \mathcal{P}).$$

Définition 2.0.7. Un élément $\omega \in W\Omega_{k[x_1,\dots,x_n]}$ est dit surconvergent s'il existe $\varepsilon > 0$ et $N > -\infty$ tels que poour toute différentielle de Witt élémentaire $e(\xi_{k,\mathcal{P}}, k, \mathcal{P})$ dans la décomposition de ω on a

$$\operatorname{ord}_V(\xi_{k,\mathcal{P}}) - \varepsilon|k| \geq N,$$

where $|k| = k_1 + \cdots k_n$ et $\operatorname{ord}_V(w)$ est le plus grand m tel que $w \in V^m W(k[x_1, \dots, x_n])$.

Note que les ε's se comporte de façon inverse par rapport aux C's. Les ε's sont plus évocateur dans un contexte plutôt géométrique : si

$$\gamma_\varepsilon(\omega) = \inf_{k,\mathcal{P}} \{\operatorname{ord}_V \xi_{k,\mathcal{P}} - \varepsilon|k|\}$$

est la norme de Gauß de ω, ω est surconvergent si $\gamma_\varepsilon(\omega) > -\infty$ pour un $\varepsilon > 0$.

Lemme 2.0.8. *Les deux notations de surconvergence sont compatible.*

Démonstration : This is first done in degree zero. Constructing from ε and N a C and in the other direction using induction on the Witt components. This is generalised to higher degrees by using the fact that the two notions behave the same under sums and almost the same under products. Because of the «almost »one has to use some basic properties of the deRham-Witt complex for one direction (in particular the formula $v(x)dy = V(xF(dy)) = V(xy^{p-1}dy) = V(xy^{p-1}dVy$, see Illusie [3]). □

Références

[1] Davis, C. : *The Overconvergent deRham-Witt Complex*. Thesis, (2009).

[2] Davis, C. ; Langer, A. ; Zink, T. : *Overconvergent deRham-Witt Cohomology*. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 44, No. 2, 197-262 (2011).

[3] Illusie, L. : *Complex de deRham-Witt et cohomologie cristalline*. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 12, No. 4, 501-661 (1979).

[4] Kedlaya, K.S. : *p-adic cohomology*. arXiv :math/0601507v2 [math.AG], (2008).

[5] Kedlaya, K.S. : *Topics in algebraic Geometry (rigid analytic geometry)*. http ://www-math.mit.edu/~kedlaya/18.727/notes.html, (2004).

[6] van der Put, M. : *The cohomology of Monsky and Washnitzer*. Mémoires de la Société Mathématique de France, Nouvelle Série (23) : 33-59, (1986).

[7] Zink, T. :*Lectures on p-divisible groups*. http ://www.math.uni-bielefeld.de/$\sim$zink/V-DFG.html, (2011/2012).