1 General considerations

1.1 Projective space bundles

On rappellele Proj d'un anneau gradué : Soit $S = \bigoplus_{d\geq 0} S_d$ un anneau gradué, S_+ l'idéal $\bigoplus_{d>0} S_d$. L'ensemble $\operatorname{Proj} S$ consiste de tous les idéaux premiers homogènes qui ne contiennent pas l'entier de S_+. Les sous-ensembles $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$ devient des sous-ensemlbes fermés engendrant une topologie. On définit un faisceau $\mathscr{O}$: Pour tout ouverte $U \in \operatorname{Proj} S$, $\mathscr{O}(U)$ est l'ensemble de fonctions $s : U \to \coprod S_{(\mathfrak{p})}$ telles que pour tout $\mathfrak{p} \in U$, $s(\mathfrak{p}) \in S_{(\mathfrak{p})}$ et telles que s est localement un quotient d'éléments de S. Cela complète la définition de $(\operatorname{Proj} S, \mathscr{O})$.

Maintenant on introduit une version relative : le **Proj** d'un faisceau d'algèbres graduées $\mathscr{S}$ sur un schéma X.

(†) X soit noethérien, $\mathscr{S} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathscr{S}_P icd$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérent avec la structure, d'une $\mathscr{O}_X$-algèbre graduée, tel que $\mathscr{S}_0 = \mathscr{O}_X$, $\mathscr{S}_1$ un $\mathscr{O}_x$-module cohérent, localement $\mathscr{S}$ soit engendré par $\mathscr{S}_1$ comme $\mathscr{O}_X$ algèbre.

1.1.1. Construction. X et $\mathscr{S}$ comme plus haut. Pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ soit $\mathscr{S}(U) = \Gamma(U, \mathscr{S}|_U)$, une A-algèbre graduée. On applique Proj et obtient de façon naturelle une projection

$$\pi_U : \operatorname{Proj} \mathscr{S}(U) \to U.$$

Comme $\mathscr{S}$ est quasi-cohérent, localement pour $f \in A$ on a $\operatorname{Proj} \mathscr{S}(U_f) \cong \pi_U^{-1}(U_f)$. Il suit que l'on a des isomorphismes

$$\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V),$$

et par conséquent, on peut coller les $\operatorname{Proj} U$ afin d'obtenir un schéma accompagner par une projection

$$\pi : \mathbf{Proj}\, \mathscr{S} \to X.$$

Les faisceaux inversibles $\mathscr{O}(1)$ sur tout U sont compatible à cette construction, et se collent donc aussi de façon canonique.

Remarque 1.1.2. Si $\mathscr{S} = \mathscr{O}_X[T_0, \ldots, T_n]$ alors $\mathbf{Proj}(\mathscr{S}) = \mathbb{P}^n_X$ avec $\mathscr{O}_X(1)$. La projection π est propre. Si X admet un faisceau inversible ample, alors π est projective.

Définitio 1.1.3. Soit X noethérien, $\mathscr{E}$ un faisceau localement libre cohérent sur X. On définit le fibré projectif $\mathbb{P}(\mathscr{E})$. Soit $\mathscr{S} = \mathrm{S}(\mathscr{E})$ l'algèbre symmétrique de $\mathscr{E}$. Alors $\mathscr{S}$ satisfait (†) et on est autorisé de définir

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}) = \mathbf{Proj}\, \mathscr{S},$$

avec la projection $\pi : \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to X$ et un faisceau inversible $\mathscr{O}(1)$.

Si $\mathscr{E}$ est libre de rang alors $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ est un espace projectif relatif. Si $\operatorname{rank}(\mathscr{E}) \geq 2$, $\exists$ un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_X$-algèbres graduées

$$\mathscr{S} \cong \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \pi_*(\mathscr{O}(l)).$$

En particulier, pour $l < 0$, $\pi_*(\mathscr{O}(l)) = 0$, pour $l = 0$ il est $\mathscr{O}_X$, pour $l = 1$ il est $\mathscr{E}$. Il exist un morphisme surjectif naturel

$$\pi^* \mathscr{E} \to \mathscr{O}(1).$$

Soit $g : Y \to X$ n'importequel morphisme. Alors la donnée d'un morphisme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{P}(\mathscr{E}) \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

revient au même de donner un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur Y et une surjection de faisceau sur Y

$$g^* \mathscr{E} \to \mathscr{L} .$$

Il y a une correspondence naturelle entre les sections de π, c'est-à-dire les morphisme $\sigma : X \to \mathbb{P}(\mathscr{E})$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$ et les faisceaux inversibles quotients $\mathscr{E} \to \mathscr{L} \to 0$.
Si en plus X est régulier et $\mathscr{E}$ de rang ≥ 2, alors

$$\operatorname{Pic} \mathbb{P}(\mathscr{E}) \cong \operatorname{Pic} X \times \mathbb{Z} .$$

Dans la même situation, si $\mathscr{E}'$ est un autre faisceau localement libre cohérent sur X, alors, $\mathbb{P}(\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(\mathscr{E}')$ sur X ssi $\exists$ faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X tel que $\mathscr{E}' \cong \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}$.

On connaît de même les notions de $\mathbb{P}^n$-fibré, de fibré affin et de fibré vectoriel.

1.2 Projective space bundle formula

Grothendieck a formulé cinq axioms pour l'existence de classes de cylce dans [2] dont le premier est la formule en question. On a une catégorie $\mathscr{V}$ d'espaces algébriques non-singulier telle que, si $X \in \mathscr{V}$ et $\mathscr{E}$ une fibré vectoriel sur X, alors $\mathbb{P}(\mathscr{E}) \in \mathscr{V}$ de même. Et similaire pour tout sous-espace $Y \subset X$ fermé non-singulier, $Y \in \mathscr{V}$. On dispose aussi des données suivantes :

1. un foncteur contravarian

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &\to \{ \text{ anneaux graduś avec unité anticommutatifs } \} \\ X &\mapsto A(X) \end{aligned}$$

2. un homomorphisme fonctoriel en X $p_X : \operatorname{Pic}(X) \to A^2(X)$
3. pour tout X et tout sous-espace algébrique fermé $i : Y \hookrightarrow X$ de codimension constante d un homomorphisme de groupes

$$i_* : A(Y) \to A(X),$$

augmentant les degrés de $2d$ unité.

On suppose les conditions suivantes satisfaites :

(A1) Soit $X \in \mathscr{V}$, $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X de rang d, ξ la classe de $\mathscr{O}(1)$ dans $A^2(\mathbb{P}(\mathscr{E}))$. Alors, les éléments

$$\xi^i \qquad 0 \leq i \leq d-1$$

forment une base de $A(X)$-modules à gauche $f^* : A(X) \to A(\mathbb{P}(\mathscr{E}))$.

(A2) Soit $X \in \mathscr{V}$, $\mathscr{L}$ un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathscr{V}$, s une section de $\mathscr{L}$ transversal à la section nulle telle que l'espace Y des zéros de s appartient à $\mathscr{V}$. Alors

$$p_X(Y) = p_X(cl_X(\mathscr{L})).$$

(A3) Soient $X \subset Y \subset Z \in \mathscr{V}$, $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Z$, alors

$$(ji)_* = j_* i_*.$$

(A4) Soient $X \subset Y \in \mathscr{V}$, $i : X \to Y$, alors pour $a \in A(X)$, $b \in A(Y)$

$$i_*(b i^*(a)) = i_*(b) a.$$

(A5) $X, Y \in \mathscr{V}$, $Y' \subset Y$ fermé non-singulier, $f : X \to Y$ transversal à Y', $X' = f^{-1}(Y')$ donc $X' \subset X$ est de même fermé non-singulier, et alors $\in \mathscr{V}$ et $p_X(X')$ est défini. Dans ce cas on a

$$p_X(X') = f^*(p_Y(Y')).$$

Grothendieck a démontré que cela permet de construire de classes de cycle, et la condition (A1) est suffisant pour construire de classes de Chern. Les anneaux gradués $A(X)$ sont dans les applications fréquemment des théories de cohomologie. On en mentionnera quelques uns.

2 Examples

2.1 Étale cohomology

Soient X une variété non-singulière projective sur un corps algébriquement clos k, $\mathscr{E}$ un faisceau de $\mathscr{O}_X$-modules localement libre de rang $m+1$ pour la topologie Zariskienne, $\Lambda = \mathbb{Z}/{}^{n}\,\mathbb{Z}$ avec $\neq \mathrm{char}(k)$. Plus tard, on admet sous quelques modifications aussi $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $= \mathbb{Q}$.

Théorème 2.1.1. *Soit ξ la classe de $\mathscr{O}(1)$ dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}(\mathscr{E}), \Lambda(1))$. Alors π^* fait $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}(\mathscr{E}))$ un $\mathrm{H}^*(X)$-module libre de base $1, \xi, \dots, \xi^m$.*

Démonstration : Il y a un isomorohisme d'anneaux gradués

$$\Lambda[T]/(T^{m+1}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^m),$$

qui envoie $T \mapsto \xi$ a section d'hypersurface. En particulier, $\mathrm{H}^*(\mathbb{P}^m)$ est un Λ-module libre a base $1, \dots, \xi^m$.

Si $\mathscr{E}$ est libre on a un isomorohisme $\mathbb{P}(\mathscr{E}) \cong X \times \mathbb{P}^m_k$ (dépendant bien sûr du choix de $\alpha : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_X^{m+1}$) qui induit alors par la formule de Künneth un $\mathrm{H}^*(X)$-isomorphisme

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{P}(\mathscr{E})) \cong \mathrm{H}^*(X \times \mathbb{P}^m_k) \cong \mathrm{H}^*(X) \otimes \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^m).$$

Le dernier est un $\mathrm{H}^*(X)$-module à base $1, \dots, T^m$ et l'isomorphisme envoie ξ vers T.

Pour la situation générale, on couvre X par des ouverts U tels que $\mathscr{E}|_U$ est trivial. On connaît l'énoncé pour ses ouverts est aussi pour les intersections, donc on peut raisonner avec la suite de Mayer-Vietoris (et le lemme de cinq). □

2.2 Rigide cohomology

3 Applications

Références

[1] Cisinski, D.-C. ; Déglise, F. : *Mixed Weil Cohomologies.* arXiv :0712.3291v3 [math.AG], (2007).

[2] Grothendieck, A. : *La théorie de classes de Chern.* Bulletin de la S. M. F., tome 86, 137-154, (1958).

[3] Hartshorne, R. : *Algebriac Geometry.* Graduate Texts in Mathematics : 52, Springer-Verlag New York, (1977).

[4] Milne, J.S. : *Lectures on Etale Cohomology.* 2.10, http ://www.jmilne.org/math/CourseNotes/lec.html, (2008).

[5] Petrequin, D. : *Classes de Chern en cohomologie rigide.* arXiv :math/0103117v1 [math.AG], (2001).

[6] Weibel, C.A. : *Algebraic K-theory.* http ://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html, (2011).