

En construisant la cohomologie associée au complexe de deRham-Witt surconvergent, on explicitera la connection qui existe entre l'algèbre de Monsky-Washnitzer (or dagger algebra) et les vecteurs de Witt surconvergens.

## 1 Un morphisme de comparaison

On dénote comme plus tôt  $\overline{A} = k[x_1, \dots, x_n]$  et  $A^\dagger = W(k)\langle x_1, \dots, x_n \rangle^\dagger$ . On fixe un relèvement du Frobenius de  $k$  à  $A^\dagger$  tel que  $x_i \mapsto x_i^p$ . Ce choix garantit que l'injection  $t_F : A^\dagger \rightarrow W(\overline{A})$  donne pour  $x_i$  le relèvement de Teichmüller de la réduction. On rappelle la définition et quelques propriétés de  $t_F$

### 1.1 L'application $t_F$

On traite le cas plus générale d'un quotient  $B$  de  $A$  (comme jadis on a les même notations etc.). Pour  $\overline{B}/k$  lisse, et un choix de relèvement de Frobenius  $F : B^\dagger \rightarrow B^\dagger$ , on a une application

$$s_F : B^\dagger \rightarrow W(B^\dagger),$$

où  $s_F(x) = (s_0, s_1, \dots)$  est défini par récurrence de façon attendue, c'est-à-dire par les solutions uniques des équations

$$s_0^{p^n} + ps_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n s_n = F^n(x).$$

Faut voir que c'est biendéfinit :

**Lemme 1.1.1.** *Soit  $A$  un anneau,  $x, y \in A$  tels que  $x \equiv y \pmod{p}$ . Alors  $\forall i \in \mathbb{N}_0$  on a  $x^{p^i} \equiv y^{p^i} \pmod{p^{i+1}}$*

DÉMONSTRATION : Par récurrence sur  $i$ .  $i = 0$  est l'hypothèse. Suppose l'énoncé montré pour  $\leq i - 1$ . Pour  $i \geq 1 \exists z \in A$  tel que  $x^{p^{i-1}} = y^{p^{i-1}} + p^i z$ . La  $p^{\text{ième}}$  puissance des deux côtés donne

$$x^{p^i} = y^{p^i} + \sum_{n=1}^{p-1} \binom{p}{n} y^{p^i(p-n)} p^{in} z^n + p^{ip} z^p.$$

Comme  $p^{i+1} | p^{ip}$  et  $p^i | p^{in} \forall n \geq 1$  et  $p | \binom{p}{n} \forall n \geq 1$ , l'énoncé suit.  $\square$

**Corollaire 1.1.2.** *Le système de polynômes a une unique solution pour tout  $x$ .*

DÉMONSTRATION : Pour  $n = 0 : s_0 = x$ .

Pour  $n = 1 : ps_1 = F(x) - x^p$  et par hypothèse  $F(x) \equiv x^p \pmod{p}$ . On suppose  $s_0, \dots, s_{n-1}$  construits. Note que  $F(s_i) \equiv s_{i+1} \pmod{p^{i+1}}$ . On remarque en plus que  $s_1^p \equiv 0 \pmod{p}$  et donc  $s_1^{p^i}$  est divisible par  $p^i$  (en fait par  $p^{p^{i-1}}$ ). On suppose alors par récurrence, les  $s_0, \dots, s_{n-1}$  tels que  $p | s_k^p$  pour  $k \geq 1$ . Alors la côtédroite de

$$p^n s_n = F^n(x) - (s_0^{p^n} + ps_1^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1} s_{n-1}^p)$$

se divise par  $p^n$ . Il reste à montrer que  $p | s_n^p$ . Comme par construction on a les équations suivantes

$$\begin{aligned} F(s_{n-1}) &\equiv s_n \pmod{p^n} \\ s_{n-1}^p &\equiv 0 \pmod{p} \\ s_{n-1}^p &\equiv F(s_{n-1}) \pmod{p} \\ F(s_{n-1})^p &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

et on en déduit que  $s_n^p \equiv 0 \pmod{p}$ .  $\square$

En composant  $s_F$  avec la projection naturelle on obtient  $t_F$

$$t_F : B^\dagger \xrightarrow{s_F} W(B^\dagger) \xrightarrow{\text{proj}} W(\overline{B}).$$

On a une projection :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k \sum_{j=0}^{n_k} a_{jk} x^j = \sum_{j=0}^{n_0} a_{j0} x^j + \sum_{k=1}^{\infty} p^k \sum_{j=0}^{n_k} a_{jk} x^j \mapsto \sum_{j=0}^{n_0} a_{j0} x^j.$$

$$B^\dagger \rightarrow \overline{B}$$

Par functorialité de  $W$  cela donne bien la deuxième partie du morphisme plus haut.

**Proposition 1.1.3.** *L'application  $t_F$  satisfait les propriétés suivantes :*

1. Elle est injective.
2. Elle est continue dans le cadre  $p$ -adique.
3. Elle est fonctorielle en la paire  $(B^\dagger, F)$
4. Si  $F(x) = x^p$  pour un  $x$  quelconque, alors  $t_F(x) = [\overline{x}]$  le relèvement de Teichmüller de la réduction de  $x$ .

DÉMONSTRATION :

1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B^\dagger & \xrightarrow{t_F} & W(\overline{B}) \\ & \searrow s_F & \nearrow \text{proj} \\ & W(B^\dagger) & \end{array}$$

commute. Il est évident que  $s_F$  est injective. La projection ne l'est pas en général, mais sur l'image de  $s_F$ . Si  $p \nmid x$ , alors l'image de  $s_0$  dans  $W(\overline{B})$   $\overline{s}_0 \neq 0$ . Comme  $t_F$  est un homomorphisme et  $W(\overline{B})$  sans  $p$ -torsion, le fait que  $t_F$  se factorise donne l'énoncé.

2. Par construction.
3. C'est fait dans [3].
4. Dito. □

En outre, pour  $a \in W(k)$ ,  $t_F(a) \in W(k)$  : en effet, puis que  $k$  est parfait, l'image d'un relèvement de Teichmüller sous n'importe quel relèvement de Frobenius est toujours  $[b^p] = [b]^p$ , est les équations pour les  $s_i$  ont une solution unique. Aussi parce que  $k$  est parfait, les éléments de  $W(k)$  s'écrivent de la forme

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} p^i [b_i].$$

D'où l'énoncé.

## 1.2 Convenance pour le cas surconvergent

Soit  $a = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \sum_{j=0}^{n_k} a_{jk} x^j \in W^\dagger(\overline{A})$  surconvergent de rayon  $C$  sur  $\overline{A}$ . (**Question :** Don't we need multivariable indices here?? – Yes, indeed!) On va calculer l'image  $t_F(a)$  pour vérifier qu'elle est aussi  $C$ -convergente et vice versa. Rappelle que pour  $\overline{A} = k[\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n]$  les éléments  $C$ -surconvergent dans  $W(\overline{A})$  sont les suites de polynômes  $(f_i)$  telles que  $\deg(f_i) \leq C(i+1)p^i$ .

**Proposition 1.2.1.** *Soit*

$$(c_i) = t_F(a) \in W(\overline{A}),$$

alors  $\deg(c_i) \leq C(i+1)p^i$ . Donc

$$t_F : A^{\dagger, C} \hookrightarrow W^{\dagger, C}(\overline{A}).$$

DÉMONSTRATION : Soit  $a$  comme plus haut. On veut alors calculer

$$t_F\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k \sum_{j=0}^{n_k} a_{jk} x^j\right).$$

Comme  $t_F$  est continu pour la topologie  $p$ -adique, cela revient au même de calculer

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k \sum_{j=0}^{n_k} t_F(a_{jk}) t_F(x^j).$$

Étant donné que l'image de  $t_F$  s'injecte dans  $W(\overline{A})$ , où  $\overline{A}$  est en particulier une  $\mathbb{F}_p$ -algèbre,  $F$  et  $V$  commute ( $FV = VF = p$ ), et il faut calculer

$$\sum_{k=0}^{\infty} V^k F^k \sum_{j=0}^{n_k} t_F(a_{jk}) t_F(x^j).$$

Par définition de  $t_F$  est l'identité sur  $W(k)$ , pour  $a_{jk} \in W(k)$ , on a  $t_F(a_{jk}) = a_{jk}$ . En plus, comme par hypothèse  $F : x_i \mapsto x_i^p$ ,  $t_F(x) = [x]$ . On s'est réduit à calculer les composantes de Witt pour

$$\sum_{k=0}^{\infty} V^k \sum_{j=0}^{n_k} F^k(a_{jk}) [x^{jp^k}].$$

Pour tout  $k$  (et  $j$ ) on écrit

$$\begin{aligned} (h_{0k}, h_{1k}, h_{2k}, \dots) &:= \sum_{j=0}^{n_k} F^k(a_{jk}) [x^{jp^k}], \\ (a_{0jk}, a_{1jk}, a_{2jk}, \dots) &:= F^k(a_{jk}). \end{aligned}$$

D'après Illusie ([3, p.505])

$$F^k(a_{jk}) [x^{jp^k}] = (a_{0jk} x^{jp^k}, a_{1jk} x^{jp^{k+1}}, a_{2jk} x^{jp^{k+2}}, \dots),$$

alors, on peut écrire

$$(h_{0k}, h_{1k}, h_{2k}, \dots) = \sum_{j=0}^{n_k} (a_{0jk} x^{jp^k}, a_{1jk} x^{jp^{k+1}}, a_{2jk} x^{jp^{k+2}}, \dots).$$

On a besoin du

**Lemme 1.2.2.** Soit  $f = (f_i)$ ,  $g = (g_i) \in W(\overline{A}^{perf})$  (where  $\overline{A}^{perf}$  is the perfection) et soit  $d_i = \max(\deg f_i, \deg g_i)$ . Si  $h = f + g$ , alors

$$\deg h_i \leq \max(p^i d_0, p^{i-1} d_1, \dots, d_i).$$

Si toutes les composantes de  $f$  et  $g$  ne disposent que d'exposants entiers, il en est de même pour  $h$ .

DÉMONSTRATION : Faisant la calculation en terme de coordonnées fantômes, on voit que

$$\deg h_i \leq \max_{j,k} (p^j d_{i-j} p^k h_{i-k})$$

(intuitively  $h_i$  is the sum over all smaller  $h$ 's up to some  $p$ -power plus some term in the  $f$ 's and  $g$ 's, more precisely this can be seen by induction). Par récurrence sur  $i$ , on obtient le premier énoncé. Le deuxième suit simplement par le fait que  $W(\overline{A}) \subset W(\overline{A}^{perf})$  est un sous-anneau.  $\square$

Retour à la proposition : on applique le lemme à chaque  $(h_{ik})_i$  pour un  $k$  fixe qui sont des sommes finies en les  $(a_{0jk}x^{jp^k}, a_{1jk}x^{jp^{k+1}}, a_{2jk}x^{jp^{k+2}}, \dots)$ . Par le lemme,

$$\deg h_{ik} \leq \max(p^i \max_j (a_{0jk}x^{jp^k}), p^{i-1} \max_j (a_{1jk}x^{jp^{k+1}}), \dots) = p^{i+k} |n_k|.$$

On re-applique le lemme à la somme  $\sum_{k=0}^{\infty} (h_{0k}, h_{1k}, \dots)$  de façon itérative. On a  $V^k(h_{0k}, h_{1k}, \dots) = (0, \dots, 0, h_{0k}, \dots)$  et donc la  $l^{\text{ième}}$  composante est  $h_{l-k,k}$  et  $\deg h_{l-k,k} = p^l |n_k|$  et le  $d$  du lemme

$$\begin{aligned} d_l &= \max_k (\deg(h_{l-k,k})) \\ &= \max_{k \leq l} (\deg h_{l-k,k}) \\ &= \max_{k \leq l} (p^{l-k+k} |n_k|) \\ &= p^l \max_{k \leq l} |n_k| \leq p^l \max_{k \leq l} (C(k+1)). \end{aligned}$$

Donc avec le lemme :

$$\begin{aligned} \deg c_i &\leq \max_{j \leq i} (p^{i-j} d_j) \\ &\leq \max_{j \leq i} (p^{i-j} p^j \max_{k \leq j} (C(k+1))) = p^i C(i+1). \end{aligned}$$

D'où l'énoncé.  $\square$

Cela montre en particulier que  $t_F : A^\dagger \rightarrow W^\dagger(\bar{A})$ , ou pour rendre plus visible ce que cela veut dire :

$$t_F : W(k)\langle x_1, \dots, x_n \rangle^\dagger \rightarrow W^\dagger(k[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]).$$

L'autre implication est la suivante :

**Proposition 1.2.3.** *Si  $a \in A^\dagger$  et  $a \notin A^{\dagger,C}$ , alors  $t_F(a) \notin W^{\dagger,C}(\bar{A})$ .*

DÉMONSTRATION : Comme plus haut, on écrit  $t_F(a) = (c_i)$ . Comme  $a \notin A^{\dagger,C}$ , il existe  $i \in \mathbb{N}_0$  tel que  $|n_i| > C(i+1)$ . On en prend le plus petit, c'est-à-dire, on montre que si

$$\begin{aligned} |n_0| &\leq C \\ |n_1| &\leq 2C \\ &\vdots \\ |n_{i-1}| &\leq iC \\ |n_i| &> (i+1)C \end{aligned}$$

alors

$$\deg c_i > (i+1)Cp^i.$$

Rappelle que dans notre représentation de  $a$ , si  $|n_k| > 0$ , alors  $a_{n_k,k} \neq 0$ , et  $a_{n_k,k}$  n'est pas divisible par  $p$  (une unité). Par conséquent, dans la représentation de  $t_F(a)$  dans la démonstration de la proposition précédente, si  $|n_k| > (k+1)C$ , on suppose que  $a_{0n_k,k} \neq 0$  (pourquoi?). Cela va nous aider à trouver une borne inférieure pour un élément

$$F^k(a_{jk})[x^{jp^k}] = (a_{0jk}x^{jp^k}, a_{1jk}x^{jp^{k+1}}, \dots).$$

CAS DE BASE :  $|n_0| > C$ . On se rappelle que

$$t_F(a) = \sum_{k=0}^{\infty} V^k \sum_{j=0}^{n_k} F^k(a_{jk})[x^{jp^k}],$$

et donc  $c_0 = \sum_{j=0}^{n_0} a_{0k}[x^j]$  et

$$\deg c_0 = n_0 > C.$$

CAS GÉNÉRAL : On choisit le plus petit  $k$  tel que  $|n_k| > (k+1)C$  (c'est-à-dire,  $|n_i| \leq (i+1)C$  pour  $0 \leq i \leq k-1$ ). D'après le raisonnement de la proposition précédente,  $\deg c_i \leq C(i+1)p^i$  pour  $0 \leq i \leq k-1$  est borné. En revanche pour  $k$ ,

$$F^k(a_{n_k,k})[x^{n_k p^k}] = (a_{0n_k k} x^{n_k p^k}, a_{1n_k k} x^{n_k p^{k+1}}, \dots)$$

le premier terme étant non-trivial est de degré  $> (k+1)Cp^k$ . Pour la somme

$$\sum_{j=0}^{n_k} F^k(a_{jk})[x^{j p^k}] = \sum_{j=0}^{n_k} (a_{0jk} x^{j p^k}, a_{1jk} x^{j p^{k+1}}, \dots) = (b_{0k}, b_{1k}, \dots)$$

la première composante a  $\deg b_{0k} > C(k+1)p^k$  étant donné que l'addition de vecteurs de Witt est l'addition usuelle pour la première composante. Comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} V^k \sum_{j=0}^{n_k} F^k(a_{jk})[x^{j p^k}] = \sum_{k=0}^{\infty} V^k (b_{0k}, b_{1k}, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$$

avec les calculations fantôme,

$$c_0^{p^k} + \dots + p^k c_k = p^k b_{0k} + \dots$$

De la côté gauche pour tout  $0 \leq i \leq k-1$

$$\deg(p^i c_i^{p^{k-i}}) \leq C(i+1)p^k$$

et de la côté droite tous les termes non-écrits sont de degré  $\leq C(k+1)p^k$  (but does this matter ??). Donc on a évidemment  $\deg c_k > C(k+1)p^k$   $\square$

Cela s'étend aussi à des quotients de  $A$ , mais la deuxième implication dans ce cas est un peu plus pénible. On note, que l'on n'a pas surjectivité en général.

Soit  $\bar{B}$  lisse affine,  $B, B^\dagger, B^{\dagger C}$  comme toujours. Pour  $b \in B^{\dagger C}$  on choisit un relèvement à  $A^{\dagger C}$

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} p^k \sum_{j=0}^{n_k} a_{jk} x^j \in W(k)\langle x_1, \dots, x_n \rangle^\dagger = A^\dagger.$$

Soit  $F$  un relèvement de Frobenius de  $\bar{B}$  à  $B^\dagger$ . Il est possible de trouver  $F'$  sur  $A^\dagger$  descendant à  $F$ , mais pas forcément de sorte que  $x_i \mapsto x_i^p$ . Mais pourtant on a

**Proposition 1.2.4.** *Pour tout relèvement de Frobenius  $F'$ , le morphisme induit*

$$t_{F'} : A^\dagger \rightarrow W(\bar{A})$$

*est de l'image dans  $W^\dagger(\bar{A})$ .*

DÉMONSTRATION : Soit  $g \in A$  de rayon  $C$ . Par quelques calculations  $(F')^n(g)$  est de rayon  $\leq p^n(C+D)$  où  $D$  ne dépend que de  $F'$ . On va montrer que  $t_{F'}(g)$  est de rayon  $\leq C+D$ .

Soit  $s_F(g) = (s_0(g), s_1(g), \dots) \in W(A^\dagger)$  défini par des équations comme plus tôt. On note  $t_{F'}(g) = (r_1(s_0(g)), r_1(s_1(g)), \dots)$  induit par la restriction,  $r_i : A^\dagger \rightarrow W_i(k)[x]$ . On denote  $d(i, a) := \deg r_i(a)$ . On veut montrer  $d(1, s_n(g)) \leq (n+1)p^n(C+D)$  pour tout  $n$ , et on montrera même  $d(i, s_n(g)) \leq (n+i)p^n(C+D)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{N}$ . C'est nécessaire pour la récurrence.

CAS DE BASE :  $n = 0$ . Puisque  $s_0(g) = g$  est surconvergent par hypothèse, on a  $d(i, s_0(g)) \leq iC \leq i(C+D)$  comme voulu.

CAS GÉNÉRAL. On suppose l'énoncé pour  $s_0(g), \dots, s_{n-1}(g)$ . Par définition de  $s_n(g)$  comme solution d'équations polynômiales, on a

$$s_0(g)^{p^n} + \dots + p^j s_j(g)^{p^{n-j}} + \dots + p^n s_n(g) = F'^n(g).$$

Par décalage, il est claire que

$$d(i, a) = d(n + i, p^n a)$$

pour tout  $a \in A^\dagger$ . Maintenant, si on sait que  $d(n + i, F^m(g))$  et  $d(n + i - j, s_j(g)^{p^{n-j}})$  pour  $j \leq n - 1$  sont bornés par  $(n + i)p^n(C + D)$ , alors

$$d(n + i, p^j s_j(g)^{p^{n-j}}) = d(n + i - j, s_j(g)^{p^{n-j}}) \leq (n + i)p^n(C + D)$$

c'est-à-dire, on connaît une borne de tout élément de l'équation sauf de  $p^n s_n(g)$ , mais par conséquence on a la même borne pour celui-là. Les énoncés nécessaires suivent par récurrence.  $\square$

*Remarque 1.2.5.* 1. Le cas d'une algèbre lisse générale suit par fonctorialité de  $t_F$ .

2. This can be generalised to  $t_{F'} : \Omega_{B^\dagger} \rightarrow W\Omega_{\overline{B}}$  since the case discussed is the degree zero elements and the left hand side of the map consists just of finite combinations of degree zero elements under differentiation, addition, multiplication.

On a donc montré que si  $b \in B^{\dagger C}$  alors  $t_F(b) \in W^{\dagger C}(\overline{B})$ .

Pour le converse, on se borne à des anneaux standard étales affines. C'est possible car tout affine lisse a un revêtement en standards étales affines.

**Définition 1.2.6.** Un standard étale affine est un anneau de la forme  $\overline{B} = (\overline{A}_h[z]/P(z))_g$ , où  $\overline{A}$  est polynômial,  $h \in \overline{A}$ ,  $\overline{A}_h$  la localisation,  $P(z)$  un polynôme monique,  $g \in \overline{A}_h[z]/P(z)$ ,  $(\overline{A}_h[z]/P(z))_g$  encore la localisation, et  $P'(z)$  inversible dans  $\overline{B}$

Par exemple,  $h = P'(z)$ . On vpit que c'est bel et bien étale sur l'espace affine.

**Proposition 1.2.7.** Soit  $\overline{B}$  un standard étale affine avec une présentation

$$\overline{B} = k[x_1, \dots, x_n, y, z, w]/(yh - 1, P(z), wg - 1).$$

Soit  $\overline{w} \in W^{\dagger C}(\overline{B})$  dans l'image de  $t_F$ . Alors, il est réellement dans l'image de  $t_f|_{B^{\dagger C+D}}$ , où  $D$  ne dépend que de  $\overline{B}$ .

DÉMONSTRATION : The proof is a bit lengthy, maybe I will write it down later.

### 1.3 Extension aux complexes différentiels

Maintenant, comme mentionné plus tôt, on étend  $t_F$  en un morphisme de complexes de façon à recevoir un morphisme de comparaison

$$t_F : \Omega_{B^\dagger} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{B}}.$$

Dans l'étape courante, cela dépend encore du choix de relèvement du Frobenius. Un corollaire du théorème suivant est que le morphisme enduit en cohomologie ne dépend plus de  $F$  après prendre le produit tensoriel avec  $\mathbb{Q}$ .

Soit  $\overline{B}$  et  $\overline{C}$  deux standard étales affines.

**Théorème 1.3.1.** Soit  $\psi_1, \psi_2 : B^\dagger \rightarrow W^\dagger(\overline{C})$  deux morphismes d'anneaux tels que pour tout  $b \in B^\dagger$ ,  $\psi_2(b) - \psi_1(b) = V(w)$  pour un  $w \in W^\dagger(\overline{C})$ . Alors les morphismes induits en algèbres différentielles graduées

$$p^\kappa \psi_1, p^\kappa \psi_2 : \Omega_{B^\dagger} \rightarrow W^\dagger \Omega_{\overline{C}}$$

où  $\kappa = \lfloor \log_p(\dim \overline{B}) \rfloor$ , sont équivalents homotopiquement de chaînes.

DÉMONSTRATION : L'homotopie de chaînes que l'on construira se factorise à travers de l'algèbre suivante.

**Définition 1.3.2.** On note  $D'(\overline{C})$  l'algèbre différentielle graduée avec les pièces graduées son données par

$$D'(\overline{C})^i = W\Omega_{\overline{C}}^i \left[ \frac{1}{p} \right] \llbracket T \rrbracket \oplus W\Omega_{\overline{C}}^{i-1} \left[ \frac{1}{p} \right] \llbracket T \rrbracket \wedge dT.$$

□

Du théorème, on déduit :

**Corollaire 1.3.3.** Soit  $F, F'$  deux relèvements de Frobenius en  $B^\dagger$ . Alors les applications induites

$$p^\kappa t_F, p^\kappa t_{F'} : \Omega_{B^\dagger} \rightarrow W^\dagger(\overline{B})$$

sont homotopiques de chaînes.

**Corollaire 1.3.4.** Soit  $\overline{g} : \overline{B} \rightarrow \overline{C}$  un morphisme de localisations d'algèbres polynômiales. On denote aussi  $\overline{g}$  le morphisme induit par  $W^\dagger\Omega$ . Soit  $F_1, F_2$  des relèvements de Frobenius sur  $B^\dagger$  et  $C^\dagger$  respectivement. Fixe un relèvement de  $\overline{g} : g : B^\dagger \rightarrow C^\dagger$ . Alors les applications

$$p^\kappa t_{F_2} \circ g, p^\kappa \overline{g} \circ t_{F_1} : \Omega_{B^\dagger} \rightarrow W^\dagger\Omega_{\overline{C}}$$

sont homotopique.

On obtient le meilleurs résultat si  $\kappa = 0$ , autrement dit si  $\dim \overline{B} < p$ . Je ne comprend pas encore pourquoi exactement ce facteur emerge. On verra que si  $\kappa = 0$  le morphisme de comparaison induit sur cohomologie est un isomorphisme même sans prendre le produit tensoriel avec  $\mathbb{Q}$ .

**Corollaire 1.3.5.** Soit  $F, F'$  deux relèvement de Frobenius sur  $B^\dagger$ . Alors les morphisme induits

$$t_F, t_{F'} : H^i(\Omega_{B^\dagger}) \rightarrow H^i(W^\dagger\Omega_{\overline{B}})$$

coincide en degrés  $i \leq p - 2$

DÉMONSTRATION : Les applications d'homotopie de plus haut donnent pour  $i \leq p - 1$  des application  $h : \Omega_{B^\dagger}^i \rightarrow W\Omega_{\overline{B}}^{i-1}$  tels que  $dh + hd = t_F - t_{F'}$ . Cela induit égalité en homotopie pour  $i \leq p - 2$ . □

## Références

- [1] DAVIS, C. : *The Overconvergent deRham-Witt Complex*. Thesis, (2009).
- [2] DAVIS, C. ; LANGER, A. ; ZINK, T. : *Overconvergent deRham-Witt Cohomology*. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 44, No. 2, 197-262 (2011).
- [3] ILLUSIE, L. : *Complex de deRham-Witt et cohomologie cristalline*. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) 12, No. 4, 501-661 (1979).
- [4] KEDLAYA, K.S. : *p-adic cohomology*. arXiv :math/0601507v2 [math.AG], (2008).
- [5] KEDLAYA, K.S. : *Topics in algebraic Geometry (rigid analytic geometry)*. [http ://www-math.mit.edu/~kedlaya/18.727/notes.html](http://www-math.mit.edu/~kedlaya/18.727/notes.html), (2004).
- [6] VAN DER PUT, M. : *The cohomology of Monsky and Washnitzer*. Mémoires de la Société Mathématique de France, Nouvelle Série (23) : 33-59, (1986).
- [7] ZINK, T. : *Lectures on p-divisible groups*. [http ://www.math.uni-bielefeld.de/~zink/V-DFG.html](http://www.math.uni-bielefeld.de/~zink/V-DFG.html), (2011/2012).