Kristallographische Gruppen

Proseminar

Sommersemester 2016

Ebene kristallographische Gruppen, die aus offensichtlichem Grund auch Ornamentgruppen genannt werden, sind Symmetriegruppen von periodischen Mustern in der euklidischen Ebene. Sie bestehen aus der Menge aller Kongruenzabbildungen, die das Muster in sich selbst abbilden, zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenoperation.

Ein periodisches Muster kann Kombinationen der folgenden elementaren Symmetrieelemente aufweisen:

- Translation (Verschiebung),
- Achsenspiegelung,
- Gleitspiegelung, also eine Kombination aus Translation und Achsenspiegelung,
- verschiedene Rotationen.

Jedes periodische Muster kann erzeugt werden, indem auf eine beschränkte Elementarzelle diese Operationen immer wieder angewandt werden, bis die gesamte Ebene parkettiert ist. Per Definition enthält die Symmetriegruppe eines periodischen Musters immer zwei linear unabhängige Translationen. Dadurch ist es auch möglich, allein durch wiederholte Verschiebung einer translativen Zelle das gesamte Muster zu erzeugen.

Es gibt, bis auf affine Äquivalenz, genau 17 solche Gruppen. (Ihnen entsprechen im dreidimensionalen Raum die 230 kristallographischen Raumgruppen.) Gleichbedeutend damit ist, zu sagen, dass es genau 17 verschiedene Äquivalenzklassen von Ornamenten gibt.

Diesen Satz wollen wir in diesem Seminar untersuchen.

Vorträge

In zwölf Vorträgen werden die Teilnehmer an die dazu notwendige Mathematik herangeführt.

Bitte beachten Sie auch die Referenzen, die auf der Seminarwebseite angegeben werden. Es wird empfohlen die Hinweise zum Halten eines Seminarvortrages, die Sie dort ebenfalls finden, zu lesen.

1. **Bewegungsgruppen**. Paragraph 1 bis einschließlich Definition 1.4 von [1].
2. **Affine Automorphismen (1)**. Paragraph 1, Satz 1.7 a) und b), Satz 1.10 bis Satz 1.14, einschließlich der Bemerkung danach in [1].
3. **Affine Automorphismen (2)**. Paragraph 1, Hilfssatz 1.15 bis Beispiel 1.17, Paragraph 4 Hilfssatz 4.11a) in [1].
4. **Gitter (1)**. Paragraph 2 bis einschließlich Hilfssatz 2.6 a-c in [1].

5. **Gitter (2)**. Paragraph 2, 2.7 a) (eventuell b) ohne Beweis erwähnen), Definition 2.8 bis Satz 2.10, Definition 2.12, Definition 2.14, Folgerung 2.15, von [1].
6. **Ein Satz von Lagrange**. Paragraph 2, Satz 2.17 a). **Moduln, Frobeniussche Kongruenzen**. Paragraph 6 bis einschließlich Definition 6.3 von [1].
7. **Ein Äquivalenzbegriff (1)**. Paragraph 6, Definition 6.9 (einschließlich der Bemerkung davor) bis Satz 6.12 von [1].
8. **Ein Äquivalenzbegriff (2)**. Paragraph 6, Definition 6.13 (einschließlich der Bemerkung danach) bis Satz 6.15, Hilfssatz 6.20, Hilfssatz 6.22 von [1].
9. **Reduzierte Basen**. Paragraph 7 bis einschließlich Satz 7.3 von [1].
10. **Netze in der Ebene**. Paragraph 7, Satz 7.4 bis Folgerung 7.8 von [1].
11. **Punktgruppen der Ebene und Ornamentgruppen**. Paragraph 7 Satz 7.9, Paragraph 8 bis einschließlich Hilfssatz 8.2 in [1].
12. **Ornamentgruppen und Klassifikation**. Paragraph 8, Hilfssatz 8.3 bis Satz 8.6. von [1].

Literatur

[1] Michael Klemm. *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen.* Springer-Verlag, Berlin Heidlberg, 1982.